XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 517.946.82

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

И. В. Клейза

Ш. И. Стрелиц [1] и И. В. Киселюс [2] рассматривали дифференциальные уравнения в частных производных, являющихся до некоторой степени аналогом уравнений типа Фукса, где в отличие от случая одного переменного требовалось выполнение дополнительного условия, обеспечивающего существование решения. Систему аналогичных уравнений исследовал Ф. И. Гече.

В работе Е. К. Ненишките [3] доказано существование одного класса решений уравнения

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+\ldots+i_r=l} F^l_{i_1\ldots i_r}(z_1 \ \ldots \ z_r) \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r} u}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_r^{i_r}}=0,$$

где $F^l_{i_1\ldots i_r}$ – абсолютно сходящиеся в некоторой области ряды Дирихле. Настоящая работа обобщает полученные в [3] результаты для систем аналогичных уравнений.

В статье будем пользоваться следующими обозначениями. Мультииндексом мы называем, как обычно, целочисленный вектор $\mathbf{i}=(i_1, \ldots i_r)$ с неотрицательными компонентами. Пусть $|\mathbf{i}|=i_1+ \ldots +i_r$. Через $D^{\mathbf{i}} U$ обозначим производную функции U порядка $|\mathbf{i}|$,

$$D^{\mathbf{i}} U=D^{i_1} \ \ldots \ D^{i_r} U,$$

где

$$D^{i_k}=\frac{\partial^{i_k}}{\partial z_k^{i_k}}, \qquad D^0 U=U.$$

Мы будем также пользоваться следующими сокращенными обозначениями:

$$\mathbf{z}^{\mathbf{i}}=(z_1^{i_1}\cdot z_2^{i_2}\cdot \ldots \cdot z_r^{i_r}, \quad \sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} a_{(\mathbf{i})}=\sum_{i_1+\ldots+i_r=0}^{n} a_{i_1\ldots i_r}.$$

Всюду через $\mathbf{z}=(z_1 \ldots z_r)$ будем обозначать точку r-мерного комплексного пространства. Определим норму матрицы $A=(a_{lk})_{p,q}$:

$$\|A\|=\sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |a_{lk}|.$$

Покажем выполнение аксиом нормы:

1) $\|A\|\geqslant 0$; $\|A\|=0$ тогда и только тогда, если $A=0$,

2) $\| cA \| = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |c| \cdot |a_{lk}| = |c| \cdot \| A \|$,

3) $\| A+B \| = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |a_{lk}+b_{lk}| \leqslant \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |a_{lk}| + |b_{lk}| = \| A \| + \| B \|$

$\left(\text{здесь } B=(b_{lk})_{p,\,q}\right)$. Норму функциональной матрицы

$$F(\mathbf{z}) = \left(b_{lk}(\mathbf{z})\right)_{p,\,q}$$

определим как неотрицательную функцию от $\mathbf{z}$, которая в каждой постоянной точке $\tilde{\mathbf{z}}$ равна норме числовой матрицы $F(\tilde{\mathbf{z}})$. Через $\langle \mathbf{z};\ \boldsymbol{\beta} \rangle$ будем обозначать скалярное произведение r-мерных векторов

$$\mathbf{z} = (z_1\ \dots\ z_r) \text{ и } \boldsymbol{\beta} = (\beta_1\ \dots\ \beta_r),$$

$$\langle \mathbf{z};\ \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{r} z_k \cdot \beta_k.$$

Дальше в тексте через $\lambda^{(j)} = (\lambda_1^{(j)} \dots \lambda_r^{(j)})$ обозначены такие действительные векторы:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^{(0)} = \dots = \lambda_r^{(0)} = 0 \\ \lambda_k^{(j)} \geqslant 0, \qquad (k=1\ \dots\ r;\ j=1,\ 2\ \dots) \\ \mu_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(j)} \underset{j\to\infty}{\nearrow} \infty. \end{array}\right\} \tag{A}$$

Доказательству основной теоремы предпосылаем две леммы.

Лемма 1. *Пусть ряд*

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \exp\{-\langle \lambda^{(j)};\ \mathbf{z} \rangle\},$$

где A_j — $p\times p$ числовые матрицы, абсолютно сходится в области G r-мерного пространства (комплексного) C^r. Тогда

$$\| A_j \| \leqslant p^2\, T(\tilde{\mathbf{x}};\ F) \exp\{\langle \lambda^{(j)};\ \tilde{\mathbf{x}} \rangle\},$$

где

$$T(\tilde{\mathbf{x}};\ F) = \sup_{\mathbf{y}} \| F(\tilde{\mathbf{x}} + i\,\mathbf{y}) \|, \qquad \tilde{\mathbf{x}} \in G_0,$$

а G_0 — образ G в R^r при отображении: $\mathbf{z} \to \mathrm{Re}\,\mathbf{z} = \mathbf{x}$.

Доказательство. Если $p=1$, то (см. [1])

$$\| A_j \| = |A_j| \leqslant \sup_{\mathbf{y}} |F(\tilde{\mathbf{x}} + i\mathbf{y})| \cdot \exp\{\langle \lambda^{(j)};\ \tilde{\mathbf{x}} \rangle\}.$$

Если же $p>1$, то

$$\| A_j \| = \sum_{l,\,k=1}^{p} |a_{lk}^{(j)}| \leqslant p^2 \max_{l,\,k} |a_{lk}^{(j)}| \leqslant$$

$$\leqslant p^2 \max_{l,\,k} \{\sup_{\mathbf{y}} |f_{lk}(\tilde{\mathbf{x}} + i\,\mathbf{y})|\} \cdot \exp\{\langle \lambda^{(j)};\ \tilde{\mathbf{x}} \rangle\} \leqslant$$

$$\leqslant p^2 \sup_{\mathbf{y}} \| F(\tilde{\mathbf{x}} + i\,\mathbf{y}) \| \cdot \exp\{\langle \lambda^{(j)};\ \tilde{\mathbf{x}} \rangle\},$$

т.е.

$$\|A_j\| \leqslant p^2 T(\tilde{\mathbf{x}};\ F)\cdot \exp\{\langle \lambda^{(j)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}.$$

Лемма 2. *Пусть дана система дифференциальных уравнений*

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} U = \exp\{\langle \beta;\ \mathbf{z}\rangle\} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp\{-\langle \lambda^{(k)};\ \mathbf{z}\rangle\}, \tag{1}$$

относительно которой предположим выполненными следующие условия:

1) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp\{-\langle \lambda^{(k)}; \mathbf{z}\rangle\}$ *абсолютно сходится в некоторой области* H r*-мерного комплексного пространства* ($B_k - p\times 1$ *числовые матрицы*);

2) $\det Q_0(\eta) \neq 0$

$$\text{для всех } \boldsymbol{\eta} = (\eta_1 \ \ldots \ \eta_r):\ \eta_1;\ \ldots;\ \eta_r \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{r} \eta_j = 1,$$

где $Q_0(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} A_{(\mathbf{i})} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{i}}$, *а* $\mathbf{A}_{(\mathbf{i})}$ *—* $p\times p$ *— числовые матрицы. Тогда*

1) *существует бесконечное множество корней* β *уравнения*

$$\det Q(\boldsymbol{\eta}) = 0,$$

где

$$Q(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_{(\mathbf{i})} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{i}},$$

удовлетворяющих условиям

$$\det Q(\beta) = 0, \tag{2}$$

а

$$\det Q(\beta - \lambda^{(k)}) \neq 0 \qquad (k = 1,\ 2\ \ldots); \tag{3}$$

2) *при выполнении условий* (2), (3) *система* (1) *имеет решения, представимые абсолютно сходящимися в области* H *рядами Дирихле*

$$U(\mathbf{z}) = \exp\{\langle \beta;\ \mathbf{z}\rangle\} \sum_{k=1}^{\infty} Q^{-1}(\beta - \lambda^{(k)}) B_k \exp\{-\langle \lambda^{(k)};\ \mathbf{z}\rangle\}.$$

Доказательство. Представим матрицу $Q(\eta)$ как сумму матриц $A_\nu(\boldsymbol{\eta})$, элементы которых однородные многочлены ν-й степени. Имеем

$$Q(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(\boldsymbol{\eta}),$$

$$A_\nu(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\mathbf{i}|=\nu} A_{(\mathbf{i})} \eta^{\mathbf{i}}.$$

Запишем, далее, матрицу $A_n(\beta - \lambda^{(k)})$ в виде суммы

$$A_n(\beta - \lambda^{(k)}) = (-1)^n A_n(\lambda^{(k)}) + \bar{A}_n(\beta - \lambda^{(k)}),$$

где $\bar{A}_n(\beta - \lambda^{(k)})$ — матрица, в которой произведения $\lambda^{\mathbf{i}} = \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r}$ степени меньше n, т. е. $|\mathbf{i}| < n$.

Тогда

$$Q(\beta-\lambda^{(k)})=\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(\beta-\lambda^{(k)})=\sum_{\nu=0}^{n} (\mu_k)^\nu\cdot A_\nu\left(\frac{\beta-\lambda^{(k)}}{\mu_k}\right)=$$

$$=(\mu_k)^n\left\{(-1)^n A_n\left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu_k}\right)+\frac{1}{(\mu_k)^n}\left[\bar{A}_n(\beta-\lambda^{(k)})+\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(\beta-\lambda)^{(k)})\right]\right\}$$

$\left(\text{где } \mu_k=\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_j^{(k)}\right)$. Определитель матрицы

$$\bar{A}_n(\beta-\lambda^{(k)})+\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(\beta-\lambda^{(k)})$$

— многочлен относительно $\lambda_1^{(k)}\ldots\lambda_r^{(k)}$ степени не выше $pn-1$, следовательно,

$$|\det Q(\beta-\lambda^{(k)})|=$$

$$=(\mu_k)^{pn}\left|(-1)^{pn}\det A_n\left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu_k}\right)+\sum_{|\mathrm{i}|<pn}\frac{(\lambda^{(k)})^{\mathrm{i}}}{(\mu_k)^{pn}}\cdot b_{(\mathrm{i})}\right|>$$

$$>(\mu_k)^{pn}\cdot\left[\left|\det\left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu_k}\right)\right|-\left|\sum_{|\mathrm{i}|<pn}\frac{(\lambda^{(k)})^{\mathrm{i}}}{(\mu_k)^{pn}}\cdot b_{(\mathrm{i})}\right|\right]. \qquad (4)$$

Здесь $b_{(\mathrm{i})}$ — некоторые постоянные. Замечая, что

$$\left|\sum_{|\mathrm{i}|<pn}\frac{(\lambda^{(k)})^{\mathrm{i}}}{(\mu_k)^{pn}}\cdot b_{(\mathrm{i})}\right|\to 0 \text{ при } \mu_k\to\infty.$$

Но $\det A_n\left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu_k}\right)\neq 0$, поэтому и $\det Q(\beta-\lambda^{(k)})\neq 0$ при достаточно больших μ_k, т.е. существует бесконечное множество корней β, удовлетворяющих свойствам (3). Из неравенства (4) следует также, что существует $c>0$ такое, что

$$|\det Q(\beta-\lambda^{(k)})|>c\cdot(\mu_k)^{pn}. \qquad (5)$$

В дальнейшем относительно β будем предполагать выполненными условия (2), (3).

Найдем решения системы (1) и докажем их абсолютную сходимость. Для этого заметим, что система

$$\sum_{|\mathrm{i}|\leq n} A_{(\mathrm{i})} D^{\mathrm{i}}\, U=B_k\cdot\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathrm{z}\rangle\} \qquad (6)$$

имеет решения

$$U(\mathrm{z})=Q^{-1}(\beta-\lambda^{(k)})\,B_k\cdot\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathrm{z}\rangle\} \qquad (7)$$

при каждом $k=1, 2\ldots$. Действительно, подставляя (7) в (6), получаем

$$\sum_{|\mathrm{i}|\leq n} A_{(\mathrm{i})} D^{\mathrm{i}}\, U(\mathrm{z})=\sum_{|\mathrm{i}|\leq n} A_{(\mathrm{i})}(\beta-\lambda^{(k)})^{\mathrm{i}}\cdot Q^{-1}(\beta-\lambda^{(k)})\cdot$$

$$\cdot B_k\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathrm{z}\rangle\}=Q(\beta-\lambda^{(k)})\cdot Q^{-1}(\beta-\lambda^{(k)})\cdot$$

$$\cdot B_k\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathrm{z}\rangle\}=B_k\cdot\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathrm{z}\rangle\}.$$

Укажем также, что

$$\|Q^{-1}(\beta-\lambda^{(k)})\|=$$
$$=\frac{\|(Q_{lk}(\beta-\lambda^{(k)}))_{p,\,p}\|}{|\det Q(\beta-\lambda^{(k)})|}<\frac{c_0\cdot(\mu_k)^{n(p-1)}}{c\cdot(\mu_k)^{np}}\leqslant\frac{\tilde c}{(\mu_k)^n}, \tag{8}$$

где $Q_{lk}(\beta-\lambda^{(k)})$ — соответствующие алгебраические дополнения матрицы $Q(\beta-\lambda^{(k)})$, c_0 — некоторая константа, а $\tilde c\geqslant\frac{c_0}{c}$.

После этих замечаний ясно, что ряд (формальное решение):

$$\sum_{k=1}^{\infty}Q^{-1}(\beta-\lambda^{(k)})\cdot B_k\cdot\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathbf{z}\rangle\} \tag{9}$$

при

$$\operatorname{Re}z_j\geqslant x_j^{(0)}\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ r)\ \mathbf{x}^{(0)}\in H_0$$

мажорируется сходящимся по условию леммы в области H рядом,

$$\tilde c\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_k)^n}\,\|B_k\|\cdot|\exp\{\langle\beta-\lambda^{(k)};\ \mathbf{x}^{(0)}\rangle\}|,$$

т.е. ряд (9) абсолютно сходится в H. Лемма полностью доказана.

Теорема. *Рассмотрим систему p уравнений с p неизвестными*

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n}F_{(\mathbf{i})}(\mathbf{z})D^{\mathbf{i}}U=0.$$

Если

$$1)\ F_{(\mathbf{i})}(\mathbf{z})=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(\mathbf{i})}\cdot\exp\{-\langle\lambda^{(k)};\ \mathbf{z}\rangle\} \tag{10}$$

— абсолютно сходящиеся в области G ряды Дирихле, а векторы $\lambda^{(k)}$ удовлетворяют условиям (**A**);

2) $\det Q_0(\eta)\neq0$, *где* $Q_0(\eta)=\sum_{|\mathbf{i}|=n}A_0^{(\mathbf{i})}\eta^{\mathbf{i}}$,

для всех $\eta=(\eta_1\ \ldots\ \eta_r)$, *удовлетворяющих условиям*:

$$\eta_1;\ \ldots;\ \eta_r\geqslant0,\quad\sum_{j=1}^{r}\eta_j=1;$$

3) *имеет место равенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\mu_n}=\rho<\infty, \tag{11}$$

то существует бесконечное множество решений системы (10), *представимых абсолютно сходящимися в некоторой области $G_1\subset G$ рядами Дирихле*

$$U(\mathbf{z})=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1\ldots l_k=1}^{\infty}B_{l_1\ldots l_k}\exp\{-\langle\lambda^{(l_1)}+\ldots+\lambda^{(l_k)};\ \mathbf{z}\rangle\}, \tag{12}$$

где β — *корень уравнения*

$$\det Q(\eta)=0 \qquad \Big(Q(\eta)=\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})}\eta^{\mathbf{i}}\Big)\cdot$$

В частности, если $F_{(\mathbf{i})}(\mathbf{z})=\mathrm{const}$, *когда* $|\mathbf{i}|=n$, *то ряды* (12), *сходятся абсолютно в области* $G_0\subset G$ *с границей, отстоящей от границы* G *на* ρ.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} U=\tau \sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} [F_{(\mathbf{i})}(\mathbf{z})-A_0^{(\mathbf{i})}] D^{\mathbf{i}} U, \tag{13}$$

совпадающую с (10) при $\tau=-1$. Докажем существование решения этого уравнения в области G_τ. Решение будем искать в виде:

$$U(\mathbf{z})=\sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s(\mathbf{z})\cdot\tau^s, \tag{14}$$

где

$$\Phi_s(\mathbf{z})=\begin{pmatrix}\varphi_s^{(1)}(\mathbf{z})\\ \varphi_s^{(2)}(\mathbf{z})\\ \vdots\\ \varphi_s^{(p)}(\mathbf{z})\end{pmatrix}.$$

Подставив (14) в (13) и сравнивая коэффициенты у одинаковых степеней τ, будем иметь

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} \Phi_0=0, \tag{15}$$

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} \Phi_s=\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} [F_{(\mathbf{i})}(\mathbf{z})-A_0^{(\mathbf{i})}] D^{\mathbf{i}} \Phi_{s-1} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots). \tag{16}$$

Найдем решения этих систем. Если β удовлетворяет уравнению

$$\det[Q(\eta)]=0,$$

то существует такая числовая матрица $E\neq 0$ размеров $(p\times 1)$, что $\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}E$ есть решение системы (15), т. е.

$$\Phi_0(\mathbf{z})=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\,E, \tag{17}$$

причем E удовлетворяет уравнению $Q(\beta)\cdot E=0$. Подставив (17) в первое матричное уравнение системы (16), получаем

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} \Phi_1=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} [F_{(\mathbf{i})}(\mathbf{z})-A_0^{(\mathbf{i})}]\,\beta^{\mathbf{i}} E=$$

$$=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_s^{(\mathbf{i})}\beta^{\mathbf{i}} E\,\exp\{-<\lambda^{(s)};\ \mathbf{z}\}. \tag{18}$$

Обозначим

$$B_s=Q^{-1}(\beta-\lambda^{(s)})\cdot\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_s^{(\mathbf{i})}\beta^{\mathbf{i}} E.$$

Из леммы 2 сейчас следует, что

$$\Phi_1(\mathbf{z})=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{s=1}^{\infty} B_s \exp\{-\langle\lambda^{(s)};\ \mathbf{z}\rangle\}$$

удовлетворяет системе (18) и абсолютно сходится в области G. Подставив $\Phi_1(\mathbf{z})$ в следующее матричное уравнение системы (16), находим:

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} \Phi_2 =$$

$$=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{s,\,t=1}^{\infty}\ \sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_s^{(\mathbf{i})}\cdot B_t\cdot(\beta-\lambda^{(t)})^{\mathbf{i}}\cdot\exp\{-<\lambda^{(s)}+\lambda^{(t)};\ \mathbf{z}\rangle\}. \quad (19)$$

Вводя обозначения

$$B_{l_1 l_2}=Q^{-1}(\beta-\lambda^{(l_1)}-\lambda^{(l_2)})\cdot\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_{l_2}^{(\mathbf{i})} B_{l_1}(\beta-\lambda^{(l_1)})^{\mathbf{i}},$$

по лемме 2 выводим, что

$$\Phi_2(\mathbf{z})=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{l_1,\,l_2=1}^{\infty} B_{l_1 l_2}\exp\{-\langle\lambda^{(l_1)}+\lambda^{(l_2)};\ \mathbf{z}\rangle\}$$

абсолютно сходится в области G и удовлетворяет матричному уравнению (19). Покажем (по индукции), что вообще

$$\Phi_s(\mathbf{z})=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\sum_{l_1\ldots l_s=1}^{\infty} B_{l_1\ldots l_s}\cdot\exp\{-\langle\lambda^{(l_1)}+\ldots+\lambda^{(l_s)};\ \mathbf{z}\rangle\}, \quad (20)$$

где

$$B_{l_1\ldots l_s}=Q^{-1}(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_s)})\cdot\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_{l_s}^{(\mathbf{i})}\cdot B_{l_1\ldots l_{s-1}}\cdot$$
$$\cdot(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_{s-1})}) \quad (21)$$
$$\left(B_{l_1}=Q^{-1}(\beta-\lambda^{(l_1)})\cdot\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_{l_1}^{(\mathbf{i})}\cdot E\cdot\beta^{\mathbf{i}}\right)\cdot$$

Действительно, если предположения (20) и (21) верны для $s-1$, то подставив $\Phi_{s-1}(\mathbf{z})$ в s-е матричное уравнение системы (16), получаем:

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_0^{(\mathbf{i})} D^{\mathbf{i}} \Phi_s =$$

$$=\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n}\sum_{l_s=1}^{\infty} A_{l_s}^{(\mathbf{i})}\sum_{l_1\ldots l_{s-1}=1}^{\infty} B_{l_1\ldots l_{s-1}}\cdot(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_{s-1})})^{\mathbf{i}}\times$$
$$\times\exp\{\langle\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_s)};\ \mathbf{z}\rangle\}=\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}\times$$
$$\times\sum_{l_1\ldots l_s=1}^{\infty}\ \sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n} A_{l_s}^{(\mathbf{i})} B_{l_1\ldots l_{s-1}}\cdot\exp\{-\langle\lambda^{(l_1)}+\ldots+\lambda^{(l_s)};\ \mathbf{z}\rangle\}. \quad (22)$$

В силу леммы 2 матричное уравнение (22) имеет решение (20) с коэффициентами (21). Но выше мы доказали, что соотношения (20) и (21) верны для $s=1, 2$, следовательно, они верны и для любого s.

Докажем абсолютную сходимость ряда (14) в области G_τ. Для этого оценим коэффициенты $B_{l_1\ldots l_s}$. Имеем

$$\|B_{l_1\ldots l_s}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|Q^{-1}(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_s)})\|\cdot\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n}\|A_{l_s}^{(\mathbf{i})}\|\cdot|(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_{s-1})})^{\mathbf{i}}|\cdot$$
$$\cdot\|B_{l_1\ldots l_{s-1}}\|.$$

В силу леммы 1 отсюда следует, что

$$\|B_{l_1\ldots l_s}\| \leqslant T(\tilde{\mathbf{x}})\cdot p^2 \exp\{\langle\lambda^{(l_s)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}\cdot \|Q^{-1}(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_s)}\|\times$$

$$\times \sum_{|\mathrm{i}|\leqslant n} |(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_{s-1})})^{\mathrm{i}}|\cdot\|B_{l_1\ldots l_{s-1}}\|$$

$$\left(\text{где } T(\tilde{\mathbf{x}})=\max_{|\mathrm{i}|\leqslant n} T(\tilde{\mathbf{x}};\ F_{(\mathrm{i})})\right).$$

Заметим, что для каждого s и j ($s=1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots, r$) существует константа $c_1>1$ такая, что

$$\left|\beta_j-\sum_{k=1}^{s-1}\lambda_j^{(l_k)}\right|<|\beta_j|+\sum_{k=1}^{s}\mu_{l_k}\leqslant c_1\sum_{k=1}^{s}\mu_{l_k} \tag{23}$$

$\left(\text{при } s=1 \text{ считаем, что } \sum_{k=1}^{s-1}\lambda_j^{(l_k)}\equiv 0, \text{ но оценка (23) верна и для этого случая}\right).$
Отсюда

$$\sum_{|\mathrm{i}|\leqslant n}|(\beta-\lambda^{(l_1)}-\ldots-\lambda^{(l_{s-1})})^{\mathrm{i}}|\leqslant\sum_{|\mathrm{i}|\leqslant n}c_1^{|\mathrm{i}|}\cdot\left(\sum_{k=1}^{s}\mu_{l_k}\right)^{|\mathrm{i}|}\leqslant$$

$$\leqslant c_1^n\sum_{|\mathrm{i}|\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{s}\mu_{l_k}\right)^{|\mathrm{i}|}\leqslant c_2\left(\sum_{k=1}^{s}\mu_{l_k}\right)^n, \tag{24}$$

где c_2 некоторая константа, не зависящая от значений s. Воспользуемся теперь оценками (8) и (24). Имеем

$$\|B_{l_1\ldots l_s}\|\leqslant p^2\tilde{c}\,c_2\,T(\tilde{\mathbf{x}})\exp\{\langle\lambda^{(l_s)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}\,\|B_{l_1\ldots l_{s-1}}\|.$$

По индукции покажем, что

$$\|B_{l_1\ldots l_s}\|\leqslant K^s\cdot T^s(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\exp\left\{\left\langle\sum_{j=1}^{s}\lambda^{(l_j)};\ \tilde{\mathbf{x}}\right\rangle\right\}, \tag{25}$$

где

$$K=\mathrm{const}>p^2\tilde{c}\,c_2(\|E\|+1).$$

Пусть оценка (25) верна для $B_{l_1\ldots l_{s-1}}$. Тогда

$$\|B_{l_1\ldots l_s}\|\leqslant K\cdot T(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\exp\{\langle\lambda^{(l_s)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}\cdot\|B_{l_1\ldots l_{s-1}}\|\leqslant$$

$$\leqslant K\cdot T(\tilde{\mathbf{x}})\exp\{\langle\lambda^{(l_s)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}\cdot K^{s-1}\cdot T^{s-1}(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\exp\left\{\left\langle\sum_{j=1}^{s-1}\lambda^{(l_j)};\ \tilde{\mathbf{x}}\right\rangle\right\}=$$

$$=K^s\cdot T^s(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\exp\left\{\left\langle\sum_{j=1}^{s}\lambda^{(l_j)};\ \tilde{\mathbf{x}}\right\rangle\right\},$$

т.е. для доказательства справедливости оценки (25) достаточно доказать ее для B_{l_1}. Легко вычисляем:

$$\|B_{l_1}\|=\left\|Q^{-1}(\beta-\lambda^{(l_1)})\cdot\sum_{|\mathrm{i}|\leqslant n}A_{l_1}\cdot\beta^{\mathrm{i}}E\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\tilde{c}}{(\mu_{l_1})^n}\cdot p^2\cdot T(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\|E\|\cdot\exp\{\langle\lambda^{(l_1)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}\cdot c_2\cdot(\mu_{l_1})^n\leqslant$$

$$\leqslant K\cdot T(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\exp\{\langle\lambda^{(l_1)};\ \tilde{\mathbf{x}}\rangle\}. \tag{26}$$

Таким образом, оценка (25) верна для $B_{l_1\ldots l_s}$ при всех s.

Оценим сейчас решения $\Phi_s(\mathbf{z})$:

$$\|\Phi_s(\mathbf{z})\| \leqslant |\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{z}\rangle\}| \cdot \sum_{l_1\ldots l_s=1}^{\infty} \|B_{l_1\ldots l_s}\| \cdot \exp\left\{-\left\langle \sum_{j=1}^{s} \lambda^{(l_j)};\ \mathbf{x}\right\rangle\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{\langle\beta;\ \mathbf{x}\rangle\} \cdot K^s \cdot T^s(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \prod_{j=1}^{s} \sum_{l_j=1}^{\infty} \exp\left\{-\left\langle \sum_{k=1}^{s} \lambda^{(l_k)};\ \mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\right\rangle\right\}.$$

Обозначив $h = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant r} (x_j - \tilde{x}_j)$, получаем:

$$\|\Phi_s(\mathbf{z})\| \leqslant \exp\{\langle\beta;\ \mathbf{x}\rangle\} \cdot K^s \cdot T^s(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \Big(\sum_{l_j=1}^{\infty} \exp\{-\mu_{l_j} \cdot h\}\Big)^s. \qquad (27)$$

Из условия (11) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu_n > \frac{\ln n}{\rho+\varepsilon} \qquad \text{при } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Тогда

$$\sum_{l_j=[N(\varepsilon)]+1}^{\infty} \exp\{-\mu_{l_j} \cdot h\} \leqslant \sum_{l_j=[N(\varepsilon)]+1}^{\infty} l_j^{-\frac{h}{\rho+\varepsilon}},$$

т.е. ряд $R(h) = \sum\limits_{l_j=1}^{\infty} \exp\{-\mu_{l_j} \cdot h\}$ сходится при $h > \rho+\varepsilon$. Пусть ряд $R(h)$ сходится при $h = h_0$, тогда он сходится равномерно при $h \geqslant h_0$. Поскольку

$$\lim_{h\to\infty} R(h) = 0,$$

то для любого $\delta > 0$: $R(h) < \delta$ при $h > h(\delta)$ и поэтому ряд

$$\exp\{\langle\beta;\ \mathbf{x}\rangle\} \sum_{s=0}^{\infty} \Big(K \cdot T(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot R(h) \cdot |\tau|\Big)^s$$

при $|\tau| \leqslant 1$ сходится при достаточно больших h и является мажорантой для ряда (14).

Пусть теперь $F_{(\mathbf{i})}(z) = \text{const}$, когда $|\mathbf{i}| = n$. Тогда суммирование в правой части (13) производится до $n-1$ и поэтому коэффициенты приобретают следующий вид:

$$B_{l_1\ldots l_s} = Q^{-1}(\beta - \lambda^{(l_1)} - \ldots - \lambda^{(l_s)}) \cdot \sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n-1} A_{l_s}^{(\mathbf{i})} \cdot (\beta - \lambda^{(l_1)} - \ldots -$$

$$- \lambda^{(l_{s-1})})^{\mathbf{i}} \cdot B_{l_1\ldots l_{s-1}}.$$

Из (23) получаем

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leqslant n-1} |(\beta - \lambda^{(l_1)} - \ldots - \lambda^{(l_{s-1})})^{\mathbf{i}}| \leqslant c_2 \Big(\sum_{k=1}^{s} \mu_{l_k}\Big)^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{s} \mu_{l_k}}{s \cdot \mu_l} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{s} \mu_{l_k}\Big)^{n-1} \leqslant c_3 \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_{l_k}\Big)^n}{s},$$

где

$$\mu_l = \min_{1 \leqslant k \leqslant s} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^{(l_k)} \right) = \min_{1 \leqslant k \leqslant s} \mu_{l_k}, \quad c_3 > \frac{c_2}{\mu_l}.$$

Прибегая к предыдущим рассуждениям, убеждаемся, что

$$\| B_{l_1 \ldots l_s} \| \leqslant \frac{\bar{K}^s \cdot T^s(\tilde{\mathbf{x}})}{s!} \cdot \exp \left\{ \left\langle \sum_{j=1}^{s} \lambda^{(l_j)}; \ \tilde{\mathbf{x}} \right\rangle \right\},$$

где

$$\bar{K} > \frac{K}{\mu_l}.$$

Поэтому ряд

$$\exp \{ \langle \beta; \ \mathbf{x} \rangle \} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{K} \cdot T(\tilde{\mathbf{x}})}{s!} \ R(h) \cdot |\tau| \right)^s$$

будет мажорантой для ряда (14) при $h > \rho + \varepsilon$ и сходится при всех значениях τ. Значит ряд (27) сходится в области $G_0 \subset G$, граница которой отстоит от границы G на ρ.

В заключение приношу благодарность доктору Ш. И. Стрелицу, предложившему эту тему и оказавшему помощь при ее решении.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
4.I.1972

Литература

1. Ш. И. Стрелиц, Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат. сб., 60 (102), № 2 (1963).
2. И. В. Киселюс, Аналитические решения одного класса линейных уравнений в частных производных, Liet. matem. rink., V, № 1 (1965), 85–96.
3. Е. К. Ненишките, Об одном классе решений дифференциальных уравнений в частных производных, Liet. matem. rink., X, № 1 (1970), 121–134.

APIE TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS SISTEMOS SPRENDIMĄ DIRICHLĖ EILUTĖMIS

J. Kleiza

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistema

$$\sum_{|\mathrm{i}| \leqslant n} F_{(\mathrm{i})}(\mathbf{z}) \, D^{\mathrm{i}} \, U = 0, \tag{1}$$

kurios koeficientai $F_{(\mathrm{i})}(\mathbf{z})$ yra absoliučiai konverguojančios kompleksinės erdvės C^r srityje G Dirichlė eilutės:

$$F_{(\mathrm{i})}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(\mathrm{i})} \cdot \exp \{ -\langle \lambda^{(k)}; \ \mathbf{z} \rangle \},$$

kur $A_k^{(\mathrm{i})}$ – yra $p \times p$ skaitinės matricos.

Įrodomas (1) sistemos sprendinių, išreiškiamų Dirichlė eilutėmis, egzistavimas ir nurodomas jų konstravimo būdas, esant tam tikroms papildomoms sąlygoms.

ON SOLVING THE SYSTEM OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN DIRICHLET SERIES

J. Kleiza

(*Summary*)

The present article investigates the system of linear partial differential equations

$$\sum_{|\mathrm{i}|\leqslant n} F_{(\mathrm{i})}(\mathrm{z})\, D^{\mathrm{i}}\, U=0 \tag{1}$$

where $F_{(\mathrm{i})}(\mathrm{z})$ are absolute converging Dirichlet series in the domain $G\subset C^r$:

$$F_{(\mathrm{i})}(\mathrm{z})=\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(\mathrm{i})} \exp\{-\langle\lambda^{(k)};\ \mathrm{z}\rangle\}$$

and $A_k^{(\mathrm{i})}$ – $p\times p$ number matrices.

Under some additional conditions the existence of the solutions of system (1) expressed by Dirichlet series is proved.