XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1972

УДК 519.21

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА ПОЛУУСТОЙЧИВЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Р. А. Куджма

§1. Введение

Пусть $X=(\Omega, x_t, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}_x)$ – стандартный марковский процесс на фазовом пространстве $(E, \mathcal{B})$, $\mathfrak{M}$ – множество моментов остановки (м. о.) относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $g(x)$ – некоторая функция. Обозначим

$$s(x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}_x g(x_\tau).$$

Функция s называется ценой. Если существует м.о. $\tau\in\mathfrak{M}$ такой, что $s(x)=\mathbf{E}_x g(x_\tau)$, то τ называется оптимальным моментом остановки (оп.м.о.). Во многих случаях нахождение оп.м.о. сводится к нахождению цены s.

Общую задачу оптимальной остановки рассматривали Дынкин [2], Григелионис и Ширяев [3], Ширяев [8], Крылов [5], Тейлор [12], Томпсон [13], но явные решения получить довольно трудно.

Представляет интерес рассмотреть классы процессов и функций g, для которых задача оптимальной остановки решается полностью. Некоторые явные решения оптимальной остановки получили Шепп [11], Мацкявичюс [6] и др.

В этой работе для класса полуустойчивых диффузионных процессов на полупрямой $(R^+, \mathcal{B}^+)$ (см. [9], [10]) найдем цену

$$s(x, y)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}_x (x_\tau)^\delta (y+\tau)^{-\gamma}, \qquad \delta>0, \ \gamma>0, \tag{1}$$

и оп.м.о. Некоторые результаты Шеппа [11] получаются из наших формул.

В § 1 даются точные определения и формулировка результатов. В следующем параграфе доказывается ряд свойств цены s.

В § 3 вводится двумерный процесс Z и доказывается, что s является наименьшей эксцессивной мажорантой (н.э.м.) функции $g(x, y)=x^\delta y^{-\gamma}$. Проверяются условия „гладкого склеивания" [3] и нахождение цены сводится к задаче Стефана.

В § 4 решается задача Стефана и доказывается единственность решения.

В § 5 доказывается существование оп.м.о.

§1. Определение и формулировка результатов

Определение. Марковский процесс $X=(\Omega, x_t, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}_x)$ на $(R^+, \mathcal{B}^+)$, где $R^+=[0, \infty)$, а $\mathcal{B}^+$ – борелевская σ-алгебра, называется полуустойчивым, если существует такая константа $\alpha>0$ (порядок процесса), что для всех $r>0$ и для всех $B\in\mathcal{B}^+$ переходная функция процесса $P(t, x, B)$ удовлетворяет следующему условию:

$$P(rt, x, B)=P(t, r^{-\alpha}x, r^{-\alpha}B). \tag{1.1}$$

Термин „полуустойчивый процесс" ввел Ламперти в [7]. В теореме 5.1 [8] Ламперти установил, что все невырожденные полуустойчивые диффузионные процессы на R^+ (марковские процессы с непрерывными траекториями) порождаются следующим оператором:

$$Lf(x)=ax^{2-\frac{1}{\alpha}}f''(x)+bx^{1-\frac{1}{\alpha}}f'(x), \quad x>0, \tag{1.2}$$

где $a>0$ и b-константы. Оператор L порождает единственный процесс, если либо $b\geqslant a$, либо $b\leqslant a\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$. Тогда точка 0 — граница-вход и граница-выход соответственно. Если $a\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)<b<a$, то 0 — регулярная граница, и существует много процессов, порождаемых оператором L, но среди них полуустойчивыми будут только те, для которых точка 0 — поглощающая или отражающая. Во всех случаях ∞ — естественная граница.

Инфинитиземальный оператор A полуустойчивого диффузионного процесса X на дважды непрерывно дифференцируемых функциях совпадает с оператором L, для $x>0$, и удовлетворяет граничным условиям, которые разделяются на следующие два случая:

$$1)\ \lim_{x\to 0} D_p^+ f(x)=\lim_{x\to 0} x^{\frac{b}{a}} f'(x)=0, \tag{1.3}$$

где $p(x)=\int^{x} u^{-\frac{b}{a}}\,du$ — шкала процесса, когда 0 — граница-вход или отражающая в регулярном случае;

$$2)\ \lim_{x\to 0} Af(x)=0, \tag{1.4}$$

когда 0 — граница-выход или поглощающая в регулярном случае.

Теорема. *Если в случае* 1) $\delta<\frac{\gamma}{\alpha}$, *то*

$$s(x,y)=\begin{cases} Ky^{\alpha\delta-\gamma}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (xy^{-\alpha})^{\frac{k}{\alpha}}, & x<c_0 y^{\alpha}, \\ x^{\delta}y^{-\gamma}, & x\geqslant c_0 y^{\alpha}, \end{cases} \tag{1.5}$$

где

$$K=c_0^{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_0^{\frac{k}{\alpha}}\right)^{-1}, \tag{1.6}$$

а c_0 — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{k}{\alpha}-\delta\right)c^{\frac{k}{\alpha}}=0, \quad a_k=\frac{\alpha^{2k}\,\Gamma(k+\gamma-\alpha\delta)}{a^k k!\,\Gamma(k+1-\alpha+\alpha a^{-1}b)}, \quad k=0, 1, \ldots, \tag{1.7}$$

и, кроме того, если $1-\frac{b}{a}\leqslant\delta$, *то*

$$\sigma_y=\inf\{t\geqslant 0,\ x_t\geqslant c_0(y+t)^\alpha\} \tag{1.8}$$

является оп.м.о.

Если в случае 2) $1-\frac{b}{a}<\delta<1-\frac{b}{a}+\frac{\gamma}{\alpha}$, *то*

$$s(x,y)=\begin{cases} K_1 y^{\alpha\delta-\gamma}(xy^{-\alpha})^{1-\frac{b}{a}}\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(xy^{-\alpha})^{\frac{k}{\alpha}}, & x<c_1y^\alpha,\\ x^\delta y^{-\gamma}, & x\geqslant c_1 y^\alpha,\end{cases} \tag{1.9}$$

где

$$K_1=c_1^{\delta-1+\frac{b}{a}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k c_1^{\frac{k}{\alpha}}\right)^{-1}, \tag{1.10}$$

а c_1 *— единственное положительное решение уравнения*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\frac{k}{\alpha}-\delta+1-\frac{b}{a}\right)c^{\frac{k}{\alpha}}=0,$$

$$b_k=\frac{\alpha^{2k}\,\Gamma\left(k+\alpha(1-a^{-1}b-\delta)+\gamma\right)}{a^k\,k!\,\Gamma\left(k+1+\alpha(a-b)a^{-1}\right)},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{1.11}$$

и м. о.

$$\sigma_0=\inf\{t\geqslant 0,\ x_t\geqslant c_1(y+t)^\alpha\ \text{ или }\ x_t=0\} \tag{1.12}$$

является оп.м.о., а если $\delta\leqslant 1-\frac{b}{a}$, *то процесс* $(x_t)^\delta\,(y+t)^{-\gamma}$ *супермартингал, и, таким образом,* $\tau\equiv 0$ *является оп.м.о., а* $s(x,y)=x^\delta y^{-\gamma}$.

Замечание 1. Если в случае 1) $\delta\geqslant\frac{\gamma}{\alpha}$ и в случае 2) $1-\frac{b}{a}+\frac{\gamma}{\alpha}\leqslant\delta$, то конечное решение задачи Стефана не существует.

Замечание 2. Вопрос о том, является ли σ_y, определенный в (1.8), оп.м.о., когда $\delta<1-\frac{b}{a}$, пока остается открытым, поскольку неясно, выполняется ли в этом случае условие A^+ (см. (5.1)).

Замечание 3. Если в случае 1) положить $\alpha=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$, $b=0$ (винеровский процесс с отражением), $\delta=\gamma=1$, то получится один результат Шеппа [11]: м.о. $\sigma_y=\inf\{t\geqslant 0,\ x_t\geqslant(t+y)^{\frac{1}{2}}\}$ является оп.м.о., а цена s принимает совсем простой вид

$$s(x,y)=\begin{cases}(ye)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x^2}{2y}}, & x<y^{\frac{1}{2}},\\ xy^{-1}, & x\geqslant y^{\frac{1}{2}}.\end{cases}$$

§2. Свойства цены s

Пусть $X=(\Omega, x_t, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbf{P}_x)$ — полуустойчивый диффузионный процесс порядка α на $(R^+, \mathscr{B}^+)$, где Ω — пространство всех непрерывных функций ω: $T\to R^+$, $T=[0,\infty)$, $x_t(\omega)=\omega(t)$, $\mathscr{F}_t=\sigma(x_u,\ u\leqslant t)$. Для каждого $r>0$ определим биективное отображение $\varphi_r:\Omega\to\Omega$ по формуле

$$(\varphi_r\omega)(t)=r^\alpha\omega\left(\frac{t}{r}\right). \tag{2.1}$$

Тогда обратное отображение φ_r^{-1} переводит $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}$. Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Отображение* φ_r^{-1} *переводит* $\mathscr{F}_t$ в $\mathscr{F}_{\frac{t}{r}}$.

Доказательство. Пусть $0<t_1<\ldots<t_k\leqslant t$, $B_i\in\mathscr{B}^+$, $i=1,\ldots,k$, и

$$F=\{\omega;\ x_{t_i}\in B_i,\qquad i=1,\ldots,k\}; \tag{2.2}$$

тогда

$$\varphi_r^{-1}(F)=\{\omega;\varphi_r(\omega)\in F\}=\{\omega;\ x_{\frac{t_i}{r}}\in r^{-\alpha}B_i,\qquad i=1,\ldots,k\}\in\mathscr{F}_{\frac{t}{r}}.$$

Это доказывает лемму, так как множества вида (2.2) порождают σ – алгебру $\mathscr{F}_t$.

Пусть $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ подмножество м.о., принимающих не более чем счетное множество значений. Пусть $\tau\in\mathfrak{M}'$, т.е., $\tau(\omega)=t_i$, когда $\omega\in F_i$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\Omega$. Введем новую функцию

$$\tau_r(\omega)=\frac{t_i}{r},\qquad \omega\in\varphi_r^{-1}(F_i),\quad i\geqslant 1. \tag{2.3}$$

В силу биективности φ_r, $\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi_r^{-1}(F_i)=\Omega$.

Лемма 2.2. $\tau_r\in\mathfrak{M}'$.

Доказательство. В силу равенств

$$\{\tau_r\leqslant t\}=\bigcup_{t_i\leqslant tr}\varphi_r^{-1}(F_i)=\varphi_r^{-1}\Big(\bigcup_{t_i\leqslant tr}F_i\Big)=\varphi_r^{-1}\{\tau\leqslant tr\}$$

и того, что $\{\tau\leqslant tr\}\in\mathscr{F}_{tr}$, из леммы 2.1 получаем, что

$$\varphi_r^{-1}\{\tau\leqslant tr\}\in\mathscr{F}_t.$$

Из условия (1.1) следует еще одно важное свойство преобразования φ_r:

Лемма 2.3. *Для всех* $x\in R^+$ *и* $F\in\mathscr{F}$

$$\mathbf{P}_x(F)=\mathbf{P}_{r^{-\alpha}x}\Big(\varphi_r^{-1}(F)\Big). \tag{2.4}$$

Доказательство. См. замечание к теореме 10.14 [1].

Лемма 2.4. *Если* $\mathbf{E}_x(x_\tau)^\delta(y+\tau)^{-\gamma}\leqslant c$ *для всех* $\tau\in\mathfrak{M}'$, *то* $s(x,y)\leqslant c$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbf{E}_x(x_\tau)^\delta(y+\tau)^{-\gamma}\leqslant c$ для всех $\tau\in\mathfrak{M}$. Если $\tau\in\mathfrak{M}$, то существует последовательность $\tau_n\in\mathfrak{M}'$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau$ для всех $\omega\in\Omega$. В силу непрерывности траекторий и леммы Лебега–Фату,

$$\mathbf{E}_x(x_\tau)^\delta(y+\tau)^{-\gamma}=\mathbf{E}_x\lim_{n\to\infty}(x_{\tau_n})^\delta(y+\tau_n)^{-\gamma}=$$

$$=\mathbf{E}_x\liminf_{n\to\infty}(x_{\tau_n})^\delta(y+\tau_n)^{-\gamma}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}_x(x_{\tau_n})^\delta(y+\tau_n)^{-\gamma}\leqslant c.$$

Предложение 2.1. *Если* $s(x_0,y)=x_0^\delta y^{-\gamma}$ *и* $0<x_0<x$, *то* $s(x,y)=x^\delta y^{-\gamma}$.

Доказательство. Для каждого $\alpha>0$ существует такой $r>1$, что $x=r^\alpha x_0$. Определим $\varphi_r:\Omega\to\Omega$ по формуле (2.1). Пусть $\tau\in\mathfrak{M}'$. В силу лемм 2.2, 2.3 и условия предложения,

$$\mathbf{E}_x(x_\tau)^\delta(y+\tau)^{-\gamma}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{F_i}(x_{t_i})^\delta(y+t_i)^{-\gamma}d\mathbf{P}_x=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\varphi_r^{-1}(F_i)} r^{\alpha\delta}(x_{\frac{t_i}{r}})^\delta(y+t_i)^{-\gamma}d\mathbf{P}_{r^{-\alpha}x}\leqslant$$

$$\leqslant r^{\alpha\delta}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\varphi_r^{-1}(F_i)}(x_{\frac{t_i}{r}})^\delta\left(y+\frac{t_i}{r}\right)^{-\gamma}d\mathbf{P}_{x_0}=$$

$$=r^{\alpha\delta}\mathbf{E}_{x_0}(x_{\tau_r})^\delta\,(y+\tau_r)^{-\gamma}\leqslant r^{\alpha\delta}s(x_0 y)=x^\delta y^{-\gamma}, \tag{2.5}$$

откуда, в силу леммы 2.4, следует, что $s(x,y)\leqslant x^\delta y^{-\gamma}$. Но при $\tau\equiv 0$, $\mathbf{E}_x(x_\tau)^\delta\,(y+\tau)^{-\gamma}=x^\delta y^{-\gamma}$.

Предложение 2.2. *Для любых* $r>0$, $y>0$, $x\geqslant 0$,

$$s(x,\,y)=r^{\alpha\delta-\gamma}s(r^{-\alpha}x,\,r^{-1}y). \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $\tau\in\mathfrak{M}'$. Как и в доказательстве предложения 2.1,

$$\mathbf{E}_x(x_\tau)^\delta\,(y+\tau)^{-\gamma}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\varphi_r^{-1}(F_i)} r^{\alpha\delta}(x_{\frac{t_i}{r}})^\delta\,(y+t_i)^{-\gamma}d\mathbf{P}_{r^{-\alpha}x}=$$

$$=r^{\alpha\delta-\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\varphi_r^{-1}(F_i)}(x_{\frac{t_i}{r}})^\delta\left(\frac{y}{r}+\frac{t_i}{r}\right)^{-\gamma}d\mathbf{P}_{r^{-\alpha}x}=$$

$$=r^{\alpha\delta-\gamma}\mathbf{E}_{r^{-\alpha}x}(x_{\tau_r})^\delta\left(\frac{y}{r}+\tau_r\right)^{-\gamma}\leqslant r^{\alpha\delta-\gamma}s(r^{-\alpha}x,\,r^{-1}y)$$

и

$$s(x,\,y)\leqslant r^{\alpha\delta-\gamma}s(r^{-\alpha}x,\,r^{-1}y). \tag{2.7}$$

Если в неравенстве (2.7) заменить x на $r^{-\alpha}x$, y на $r^{-1}y$, а r на r^{-1}, то получим неравенство в другую сторону. Если в (2.6) вместо r поставить y или $x^{\frac{1}{\alpha}}$, то получится

$$s(x,\,y)=y^{\alpha\delta-\gamma}s(y^{-\alpha}x,\,1), \tag{2.8}$$

$$s(x,y)=x^{\delta-\frac{\gamma}{\alpha}}\,s(1,\,x^{-\frac{1}{\alpha}}y). \tag{2.9}$$

Лемма 2.5. *Если для всех* $\tau\geqslant 0$

$$c_1(y_1+\tau)^{-\gamma}\leqslant c_2(y_2+\tau)^{-\gamma}+c_3(y_3+\tau)^{-\gamma},$$

где $c_i\geqslant 0$, $i=1,2,3$, *то для всех* $x\in R^+$

$$c_1 s(x,\,y_1)\leqslant c_2 s(x,\,y_2)+c_3 s(x,\,y_3).$$

Доказательство тривиально.

Следствие 1. *Цена s монотонно убывает по y.* Это следует из монотонности функции $f(y)=(y+\tau)^{-\gamma}$.

Следствие 2. *Если $s(x, y)=x^{\delta}y^{-\gamma}$ при каких-нибудь $x>0$, $y>0$, то цена s конечна для всех $x\geqslant 0$, $y>0$.* Это следует из предложения 2.1, формулы (2.8) и монотонности s по y.

Замечание. В дальнейшем мы будем предполагать, что выполняется условие следствия 2.

Предложение 2.3. *Цена s непрерывна, как функция двух аргументов.*

Доказательство. Из равенства

$$(y+\tau)^{-\gamma}-(y+h+\tau)^{-\gamma}=(y+\tau)^{-\gamma}\left[1-\left(1-\frac{h}{y+h}\right)^{\gamma}\right], \quad h>0,$$

и леммы 2.5 получаем

$$0\leqslant s(x, y)-s(x, y+h)\leqslant s(x, y)\left[1-\left(1-\frac{h}{y+h}\right)^{\gamma}\right]. \tag{2.10}$$

Переходя к пределу в (2.10), когда $h\downarrow 0$, получаем непрерывность s по y справа. Аналогично получаем непрерывность слева, а из формулы (2.9) получаем непрерывность s, как функции двух переменных.

Обозначим $G(y, h)=h^{-1}[s(x, y)-s(x, y+h)]$, $y>0$, $h>0$, $x\geqslant 0$.

Лемма 2.6. *Функция G монотонно убывает по h и по y.*

Доказательство. Из неравенства

$$h_2^{-1}[(y+\tau)^{-\gamma}-(y+h_2+\tau)^{-\gamma}]\leqslant h_1^{-1}[(y+\tau)^{-\gamma}-(y+h_1+\tau)^{-\gamma}],$$
$$0<h_1<h_2, \tag{2.11}$$

в силу леммы 2.5, следует монотонность G по h. Имеет место следующее элементарное неравенство:

$$(y_2+\tau)^{-\gamma}-(y_2+h+\tau)^{-\gamma}\leqslant(y_1+\tau)^{-\gamma}-(y_1+h+\tau)^{-\gamma}, \quad 0<y_1<y_2. \tag{2.12}$$

Если $h=y_2-y_1$, то, в силу леммы 2.1,

$$s(x, y_2)-s(x, y_2+h)\leqslant s(x, y_1)-s(x, y_1+h). \tag{2.13}$$

Применяя неравенство (2.13) m раз, получаем, что оно верно для

$$h=m^{-1}(y_2-y_1).$$

Пусть $h=k\,2^{-n}(y_2-y_1)$, где $1\leqslant k<2^n$. Разлагаем число k в двоичной системе:

$$k=k_1 2^{n-1}+k_2 2^{n-2}+\ldots+k_{n-1}2+k_n, \quad k_i=0 \text{ или } 1, \quad i=1,\ldots,n.$$

Обозначим $\Delta=2^{-n}(y_2-y_1)$, тогда $h=k\Delta$. Складывая следующие неравенства:

$$s(x, y_2)-s(x, y_2+k_1 2^{n-1}\Delta)\leqslant s(x, y_1)-s(x, y_1+k_1 2^{n-1}\Delta),$$

$$s(x, y_2+k_1 2^{n-1}\Delta)-s\left(x, y_2+(k_1 2^{n-1}+k_2 2^{n-2})\Delta\right)\leqslant$$

$$s(x, y_1+k_1 2^{n-1}\Delta)-s\left(x, y_1+(k_1 2^{n-1}+k_2 2^{n-2})\Delta\right).$$

. . . .

$$s\left(x, y_2+(k_1 2^{n-1}+\ldots+k_{n-1}2)\Delta\right)-s(x, y_2+k\Delta)\leqslant$$

$$\leqslant s\left(x, y_1+(k_1 2^{n-1}+\ldots+k_{n-1}2)\Delta\right)-s(x, y_1+k\Delta),$$

получаем, что неравенство (2.13) верно для $h=k2^{-n}(y_2-y_1)$, $1\leqslant k<2^n$. Теперь, в силу непрерывности s, можно продолжить неравенство (2.13) для всех h, $0<h\leqslant y_2-y_1$.

Аналогично неравенство (2.13) можно доказать для h, $h>y_2-y_1$. Разделив (2.13) на h, получаем утверждение леммы.

Предложение 2.4. *Существует непрерывная справа правая производная цены s по y.*

Доказательство. Если $0<y_0\leqslant y\leqslant y_0+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, то множитель при $s(x, y)$ в (2.10) имеет порядок $O(h)$, а $s(x, y)\leqslant s(x, y_0)$. Разделив (2.10) на h, получаем, что функция G ограничена в области $[y_0, y_0+\varepsilon]\times(0, h_0]$, $h_0>0$. В силу ограниченности и монотонности G, существуют и равны все следующие пределы:

$$-s_y^+(x, y_0)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{s(x, y_0)-s(x, y_0+h)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}G(y_0, h)=$$

$$=\lim_{h\downarrow 0}\lim_{y\downarrow y_0}G(y, h)=\lim_{y\downarrow y_0}\lim_{h\downarrow 0}G(y, h)=-\lim_{y\downarrow y_0}s_y^+(x, y),$$

что доказывает предложение.

Следствие. *Существует непрерывная слева левая производная цены s по x.*

Это следует из предложения 2.4 и формулы (2.9).

§3. Задача Стефана для цены

Пусть $Y=(\Omega', y_t, \mathscr{F}', \mathscr{F}'_t, \mathbf{P}_y)$ — равномерное движение на фазовом пространстве $V=(0, \infty)$ со скоростью 1. Тогда множество траекторий Ω' можно отождествить с V, элементы обоих множеств будем обозначать через y. Введем двумерный процесс $Z=X\times Y=(\Omega'', z_t, \mathscr{F}'', \mathscr{F}''_t, \mathbf{P}_z)$ на пространстве $R^+\times V$, где

$$\Omega''=\Omega\times\Omega',\quad z_t=(x_t, y_t),\quad \mathscr{F}''=\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}',\quad \mathscr{F}''_t=\mathscr{F}_t\otimes\mathscr{F}'_t,\quad \mathbf{P}_z=\mathbf{P}_x\times\mathbf{P}_y.$$

Пусть $\mathfrak{N}$ — все м.о. относительно σ-алгебр $\mathscr{F}''_t$. Обозначим

$$\tilde{s}(x, y)=\sup_{\sigma\in\mathfrak{N}}\mathbf{E}_{(x, y)}(x_\sigma)^\delta(y_\sigma)^{-\gamma},\qquad \delta>0,\ \gamma>0. \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. $s(x, y)=\tilde{s}(x, y)$.

Доказательство. Имеется естественное инъективное отображение $j:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$, определяемое по формуле:

$$(j\tau)(\omega, y)=\tau(\omega). \tag{3.2}$$

В силу инъективности j и равенства

$$\mathbf{E}_{(x, y)}(x_{j\tau})^\delta(y_{j\tau})^{-\gamma}=\int_{\Omega\times\Omega'}(x_\tau)^\delta(y_\tau)^{-\gamma}\,d\mathbf{P}_{(x, y)}=$$

$$=\int_\Omega d\mathbf{P}_x\int_{\Omega'}(x_\tau)^\delta(y_\tau)^{-\gamma}\,d\mathbf{P}_y=\int_\Omega(x_\tau)^\delta(y+\tau)^{-\gamma}\,d\mathbf{P}_x,$$

следует, что

$$s(x, y)\leqslant\tilde{s}(x, y). \tag{3.3}$$

Пусть $\sigma\in\mathfrak{N}$. Тогда сечение σ, для любого $y\in\Omega'$, σ_y есть измеримая функция на $(\Omega, \mathcal{F})$ и сечение $\{\sigma\leqslant t\}_y=\{\sigma_y\leqslant t\}\in F_t$ (см. предложение III. 1.2 [7]). Значит, $\sigma_y\in\mathfrak{M}$ и

$$\mathbf{E}_{(x,y)}(x_\sigma)^\delta(y_\sigma)^{-\gamma}=\int\limits_\Omega (x_{\sigma_y})^\delta(y+\sigma_y)^{-\gamma}d\mathbf{P}_x\leqslant s(x, y) \tag{3.4}$$

для всех $\sigma\in\mathfrak{N}$. В силу (3.3) и (3.4), следует утверждение предложения.

Дынкин в [2] доказал, что цена $\tilde{s}$ есть н.э.м. функции $g(x, y)=x^\delta y^{-\gamma}$ для процесса Z. Григелионис и Ширяев в [3] свели нахождение цены $\tilde{s}$ к задаче Стефана.

Пусть $D=\{z, z\in R^+\times V, \tilde{s}=g\}$, $C=\{z, z\in R^+\times V, \tilde{s}>g\}$, а Γ—контур множества D. В силу непрерывности s и g, D – замкнутое множество, а C – открытое.

Из предложений 2.1, 2.2 и того, что в случае 2) $s(0, y)=0$, получаем, что в случае 1) $C=\{(x, y), 0\leqslant x<c_0y^\alpha\}$ и в случае 2) $C=\{(x, y), 0<x<c_1y^\alpha\}$, где c_0, c_1 – константы. В силу теоремы 5 [3], для каждой точки $z\in C$ существует ее окрестность U_1 такая, что для всех $U\subseteq U_1$

$$\tilde{s}(z)=\mathbf{E}_z\tilde{s}(z_{\tau(U)}), \tag{3.5}$$

где $\tau(U)$ – момент первого выхода процесса Z из U. В силу этого,

$$\mathfrak{U}\tilde{s}(z)=0, \quad z\in C, \tag{3.6}$$

где $\mathfrak{U}$ – характеристический оператор процесса Z.

Предложение 3.2. *Цена $\tilde{s}$ дважды непрерывно дифференцируемая на C.*

Доказательство. Выберем окрестность $(x_1, x_2)\times(y_1, y_2)$ точки $z=(x, y)$, чтобы выполнялось (3.5). Тогда интеграл в правой стороне (3.5) можно выразить через характеристики процесса X:

$$\tilde{s}(x, y)=\int\limits_y^{y_2}\tilde{s}(x_1, v)dQ_1(v-y, x)+\int\limits_y^{y_2}\tilde{s}(x_2, v)dQ_2(v-y, x)+$$
$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}\tilde{s}(u, y_2)Q_0(y_2-y, x, du), \tag{3.7}$$

где

$$Q_1(t, x)=\mathbf{P}_x\{\tau_{x_1}<\tau_{x_2},\ \ \tau_{x_1}<t\}, \qquad Q_2(t, x)=$$
$$=\mathbf{P}_x\{\tau_{x_2}<\tau_{x_1},\ \ \tau_{x_2}<t\},\quad Q_0(t, x, du)=\mathbf{P}_x\{x_t\in du,\ t<\tau_{x_1}\wedge\tau_{x_2}\},$$

τ_{x_i} – момент первого достижения процесса X точки x_i, $i=1, 2$. В 4.11 [4] доказано, что Q_0 имеет плотность $q_0(t, x, u)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial q_0}{\partial t}=ax^{2-\frac{1}{\alpha}}\frac{\partial^2 q_0}{\partial x^2}+bx^{1-\frac{1}{\alpha}}\frac{\partial q_0}{\partial x}, \qquad x_1<x<x_2, \tag{3.8}$$

и что Q_1, Q_2 удовлетворяют уравнению (3.8). Тогда функции Q_1, Q_2 имеют плотности, которые тоже удовлетворяют (3.8). В силу непрерывности $\tilde{s}$ можно дифференцировать под интегралами в (3.7) и получить утверждение предложения.

Оператор $\mathfrak{U}$ на дважды дифференцируемых функциях f совпадает с оператором

$$\frac{\partial f}{\partial y}+A_x f, \tag{3.9}$$

где $A_x f$ означает, что инфинитиземальный оператор A применяется по аргументу x. В силу (3.6), (3.9) и предложения 3.2, цена $\tilde{s}$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\tilde{s}(x, y)=x^{\delta} y^{-\gamma}, \qquad x \geqslant c y^{\alpha}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial y}+a x^{2-\frac{1}{\alpha}} \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial x^2}+b x^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x}=0, \qquad x<c y^{\alpha}, \tag{3.11}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{b}{a}} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x}=0. \qquad \text{в случае 1)}, \tag{3.12}$$

$$\tilde{s}(0, y)=0 \qquad \text{в случае 2)}, \tag{3.13}$$

где c — неизвестная константа, зависящая от α, δ, γ, a, b и граничного условия.

Теперь проверим условия A_1-A_4 теоремы 8 [3], чтобы выполнялось „гладкое склеивание“, т.е.

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad x=c y^{\alpha}. \tag{3.14}$$

A_1. Для $z \in \Gamma$

$$g(z)=T_{\tau(U)} g(z)+o(\rho),$$

где T_t — полугруппа операторов процесса Z; U — круговая окрестность z радиуса ρ.

A_2. В окрестности точек $z \in \Gamma$ производные $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$ и односторонние производные $\partial \tilde{s}/\partial x$, $\partial \tilde{s}/\partial y$ существуют и непрерывны.

A_3. В точке $z \in \Gamma$ определена касательная, производная $\partial \nu/\partial \varkappa$ существует и непрерывна в окрестности точки z, где $(\nu, \varkappa)$ — ортогональная система координат с началом в z, а ν совпадает с направлением вектора ν_z — внутренней нормали множества C в z.

A_4. Для $z \in \Gamma$ и достаточно малых $\rho>0$

$$\int_{\{\nu_{\tau(U)} \geqslant 0\}} \nu_{\tau(U)}\, d\mathbf{P}_z \geqslant c\rho, \qquad c>0. \tag{3.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Функция g — дифференцируемая сколько угодно раз и поэтому существует предел:

$$\mathfrak{U} g(z)=\lim_{U \downarrow z} \frac{T_{\tau(U)} g(z)-g(z)}{\mathbf{E}_x \tau(U)}. \tag{3.16}$$

Если

$$Q=(x-\rho, x+\rho)\times(y-\rho, y+\rho), \text{ то } \mathbf{E}_{(x,y)} \tau(U) \leqslant \mathbf{E}_{(x,y)} \tau(Q)$$

и

$$\mathbf{E}_{(x,y)} \tau(Q)=\mathbf{E}_x\{\tau_I, \tau_I \leqslant \rho\}+\rho \mathbf{P}_x\{\tau_I>\rho\} \leqslant \mathbf{E}_x \tau_I+\rho \mathbf{P}_x\{\tau_I>\rho\}, \tag{3.17}$$

где τ_I — первый выход процесса X из интервала $(x-\rho, x+\rho)$. Как известно [4], функция $e(v)=\mathbf{E}_v \tau_I$ является решением задачи:

$$Ae(v)=-1, \quad x-\rho<v<x+\rho, \quad e(x-\rho)=e(x+\rho)=0.$$

После элементарных вычислений получаем, что $e(x)=O(\rho^2)$, откуда в силу (3.17),

$$\mathbf{E}_{(x,y)}\tau(U)=O(\rho^2).$$

В силу существования предела (3.16), $T_{\tau(U)}g(z)-g(z)=o(\rho)$.

2. Условие A_2 следует из дифференцируемости $\tilde{s}$ на C, предложения 2.4 и его следствия.

3. Условие A_3 выполняется тривиально.

4. Из формы контура Г видно, что в любой точке $z=(x, y)$ угол φ между $\mathbf{v}_z$ и осью y такой, что $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\varphi<\psi<\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\mathbf{P}_z\{\nu_{\tau(U)}<\rho\cos\psi\}\leqslant\mathbf{P}_x\{\tau_{x+\rho\sin(\psi-\varphi)}<\tau_{x-\rho}\}=$$
$$=\frac{p(x)-p(x-\rho)}{p\big(x+\rho\sin(\psi-\varphi)\big)-p(x-\rho)},\tag{3.18}$$

где $\tau_{x'}$ — момент первого достижения процесса X точки $x'=x-\rho$, $x+\rho\sin(\psi-\varphi)$, а $p(x)$ — шкала процесса X (см. (1.3)). Правая сторона в (3.18) стремится к $[1+\sin(\psi-\varphi)]^{-1}<1$, когда $\rho\to 0$, откуда в силу неравенства

$$\int\limits_{\{\nu_{\tau(U)}\geqslant 0\}}\nu_{\tau(U)}\,d\mathbf{P}_z\geqslant\int\limits_{\{\nu_{\tau(U)}\geqslant\rho\cos\psi\}}\nu_{\tau(U)}\,d\mathbf{P}_z\geqslant$$
$$\geqslant\rho\cos\psi\,\mathbf{P}_z\{\nu_{\tau(U)}\geqslant\rho\cos\psi\},$$

следует условие A_4.

§4. Решение задачи Стефана

После замены переменных $u=xy^{-\alpha}$ и $\tilde{s}(xy^{-\alpha}, 1)=h(u)$ из уравнений (3.10)–(3.14) получаем

$$au^2h''(u)+(b-\alpha u^{\frac{1}{\alpha}})uh'(u)+(\alpha\delta-\gamma)u^{\frac{1}{\alpha}}h(u)=0,\quad 0<u\leqslant c,\tag{4.1}$$

$$h(u)=u^{\delta},\qquad u\geqslant c,\tag{4.2}$$

$$h'(u)=\delta u^{\delta-1},\qquad u=c,\tag{4.3}$$

$$\lim_{u\to 0}u^{\frac{b}{a}}h'(u)=0\quad\text{в случае 1)},\tag{4.4}$$

$$h(0)=0\quad\text{в случае 2)}.\tag{4.5}$$

Полностью решим уравнения в случае 1). Случай 2) рассматривается аналогично.

Методом неопределенных коэффициентов находим одно решение (4.1) в виде ряда по степеням $u^{\frac{1}{\alpha}}$.

$$h_1(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^{\frac{k}{\alpha}},\tag{4.6}$$

где a_k определены формулой (1.7). Ряд (4.6) сходится при всех $u \geqslant 0$. Продифференцированный почленно ряд (4.6) без конечного числа членов сходится равномерно в каждом конечном интервале. Легко проверяем, что h_1 удовлетворяет (4.4), а другое линейно независимое от h_1 решение (4.1)

$$h_2(u) = h_1(u) \int u^{-\frac{b}{a}} e^{\frac{\alpha^2}{a} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}}} h_1^{-2}(u)\, du$$

условие (4.4) не удовлетворяет. Подставив $h(u) = K h_1(u)$ в (4.2) и (4.3), получаем уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{k}{\alpha} - \delta\right) c^{\frac{k}{\alpha}} = 0. \tag{4.7}$$

Обозначим левую часть уравнения (4.7) через $H(c)$. Функция H непрерывна на $[0, \infty)$ и непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$. $H(0) = -a_0 < 0$, а при достаточно больших c, $H(c) > 0$. Пусть $c_0 = \inf\{c, H(c) = 0\}$. Ясно, что $c_0 > 0$. Докажем, что c_0 – единственное решение уравнения (4.7). Пусть $c_1 = \inf\{c > c_0, H(c) = 0\}$ и $H(c) > 0$, $c_0 < c < c_1$. По теореме Роля должно существовать c_2, $c_0 < c_2 < c_1$, такое, что $H'(c_2) = 0$. Пусть $k_0 = \min\left(k, \frac{k}{\alpha} > \delta\right)$. В силу положительности H на (c_0, c_1).

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k k \left(\frac{k}{\alpha} - \delta\right) c^{\frac{k}{\alpha}} > k_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \left(\frac{k}{\alpha} - \delta\right) c^{\frac{k}{\alpha}} >$$

$$> k_0 \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \left(\delta - \frac{k}{\alpha}\right) c^{\frac{k}{\alpha}} > \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k k \left(\delta - \frac{k}{\alpha}\right) c^{\frac{k}{\alpha}} + k_0 a_0 \delta, \tag{4.8}$$

откуда $\alpha c H'(c) > k_0 a_0 \delta > 0$ для $c_0 < c < c_1$. Получили противоречие.

Если $H(c) < 0$, $c_0 < c < c_1$, то $H'(c_0) = 0$. Если в (4.8) поставить $c = c_0$, то средний знак неравенства надо заменить равенством и мы опять получим $\alpha c H'(c_0) > k_0 a_0 \delta$, что противоречит $H'(c_0) = 0$. Единственность доказана.

Замечание. Мы нашли решение задачи Стефана, т.е. построили дифференцируемую э.м. функции $g(x, y) = x^{\delta} y^{-\gamma}$. Тогда для цены s, н.э.м. функции g, выполняется условие следствия 2 леммы 2.5 и поэтому цена s совпадает с единственным решением задачи Стефана.

§5. Существование оптимального момента остановки

Пусть $\sigma = \inf\{t \geqslant 0, z_t \in D\}$. Тогда в случае 1) сечение σ в точке y $\sigma_y = \inf\{t \geqslant 0, x_t \geqslant c_0 (y+t)^{\alpha}\}$. Если $\mathbf{P}_z\{\sigma < \infty\} = 1$ и выполнено условие

$$A^+ : \mathbf{E}_z [\sup_{t \geqslant 0} (x_t)^{\delta} (y_t)^{-\gamma}] < \infty, \qquad z \in R^+ \times V, \tag{5.1}$$

то σ – оп.м.о., т.е.

$$\tilde{s}(x, y) = \mathbf{E}_{(x,y)} (x_{\sigma})^{\delta} (y_{\sigma})^{-\gamma} = \mathbf{E}_x (x_{\sigma_y})^{\delta} (y + \sigma_y)^{-\gamma},$$

откуда σ_y – тоже оп.м.о. Заметим, что $\mathbf{P}_z\{\sigma < \infty\} = \mathbf{P}_x\{\sigma_y < \infty\}$, а условие A^+ равносильно условию

$$\mathbf{E}_x [\sup_{t \geqslant 0} (x_t)^{\delta} (y+t)^{-\gamma}] < \infty, \qquad (x, y) \in R^+ \times V. \tag{5.2}$$

Предложение 5.1. *Пусть X — полуустойчивый диффузионный процесс порядка α, 0 — отражающая граница или граница-вход. Если $h(t)\uparrow\infty$, когда $t\uparrow\infty$, $x>0$, то $\mathbf{P}_x\{x_t\geqslant(t+1)^\alpha h(t+1)$ бесконечное число раз при $t\uparrow\infty\}=0$ или 1, в зависимости от того, сходится или расходится интеграл*

$$\int^{+\infty} h(t)^{\frac{b\alpha+(1-\alpha)a}{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{a}h(t)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{t}\,dt. \tag{5.3}$$

Доказательство. Если ввести новый процесс

$$X^{\cdot}\equiv[x_t^{\cdot}=e^{-t}x(e^t-1)^{\frac{1}{\alpha}},\quad t\geqslant 0,\ \mathbf{P}_x],$$

то доказательство предложения почти без изменений переносится из 4.12 [4]. В силу свойства (1.1) переходной функции и того, что плотость $q(t, x, u)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова (3.8) для $x>0$, плотность $q^{\cdot}(t, x, u)$ процесса $X^{\cdot}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial q^{\cdot}}{\partial t}=\frac{a}{\alpha^2}x\frac{\partial^2 q^{\cdot}}{\partial x^2}+\left(\frac{b}{\alpha}+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}a-x\right)\frac{\partial q^{\cdot}}{\partial x}. \tag{5.4}$$

Из уравнения (5.4) можно вычислить шкалу

$$p(x)-p(x_0)=\int_{x_0}^{x} u^{-\frac{b\alpha+(1-\alpha)a}{a}} e^{\frac{\alpha_2}{a}u}\,du,\qquad x_0<x,$$

и меру скорости процесса $X^{\cdot}$

$$m[x_0, x)=\frac{\alpha^2}{a}\int_{x_0}^{x} u^{\frac{\alpha(b-a)}{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{a}u}\,du,\qquad 0<x_0<x,$$

$m(0)=0$.

Поскольку $p(+\infty)=\infty$, $m[0,\infty)<\infty$, $p(x)\sim\frac{a}{\alpha^2}x^{-\frac{b\alpha+(1-\alpha)a}{a}}e^{\frac{\alpha^2}{a}x}$, можно применить формулу (6) 4.12 [4], откуда следует утверждение предложения.

Следствие 1. $\mathbf{P}_0\{x_t\geqslant t^\alpha h(t)$ *бесконечное число раз при* $t\uparrow\infty\}=0$ *или* 1, *в зависимости от того, сходится или расходится интеграл* (5.3).

Это следует из формулы (14) 4.12 [4].

Следствие 2. *Если* $\sigma_y=\inf\{t\geqslant 0,\ x_t\geqslant c(y+t)^\alpha\}$, *где* $y>0$, $c>0$ *любые константы, то* $\mathbf{P}_x\{\sigma_y<\infty\}=1$, $x\geqslant 0$.

Доказательство. Если взять $h(t)=\left(\frac{a}{\alpha^2}\ln\ln t\right)^\alpha$, то интеграл (5.3) расходится, а $t^\alpha\left(\frac{a}{\alpha^2}\ln\ln t\right)^\alpha\geqslant c(y+t)^\alpha$ для достаточно больших t.

Замечание. Так как в случае 2) процесс x_t достигает границы 0 через конечное время, то $\mathbf{P}_x\{\sigma_0<\infty\}=1$ (определение σ_0 см. (1.12)).

Лемма 5.1. *Если в случае* 1) $1-\frac{b}{a}\leqslant\delta<\frac{\gamma}{\alpha}$, *а в случае* 2) $1-\frac{b}{a}<\delta<1-\frac{b}{a}+\frac{\gamma}{\alpha}$, *то выполняется условие* A^+.

Доказательство. Если $1-\frac{b}{a}\leqslant\delta$, то процесс $(x_t)^\delta_{\sim}$ — субмартингал. Пусть $\lambda>1$ такое, что цена s конечна при параметрах $\lambda\delta$ и γ. Тогда

$$\mathbf{P}_x\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}(x_s)^\delta>u\}\leqslant u^{-\lambda}\mathbf{E}_x x_t^{\delta\lambda}\leqslant u^{-\lambda}(y+t)^\gamma s(x,y), \tag{5.5}$$

а при $t>t_0>0$

$$\mathbf{P}_x\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}(x_s)^\delta>u\}\leqslant c\,u^{-\lambda}t^\gamma,$$

где c — константа.

Заключительная часть доказательства леммы такая же, как и в лемме 2 [6].

Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключение хочу выразить благодарность своему научному руководителю д-ру физ.-мат. наук. проф. Б. Григелионису.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
9.II.1972

Литература

1. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
2. Е. Б. Дынкин, Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса, ДАН СССР, **150**, 2 (1963), 238–240.
3. Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов, Теор. вер. и ее прим., **XI**, 4 (1966), 612–631.
4. К. Ито, Г. Маккин, Диффузионные процессы и их траектории, М., „Мир“, 1968.
5. Н. В. Крылов, Управление марковскими процессами и пространства W, Изв. АН СССР. Сер. матем., **35** (1971), 224–255.
6. В. Мацкявичюс, О некоторых задачах оптимальной остановки устойчивых случайных процессов, Liet. matem. rink., **XII**, 1 (1972), 173–180.
7. Ж. Неве, Математические основы теории вероятностей, М., „Мир“, 1969.
8. А. Н. Ширяев, Статистический последовательный анализ, М., „Наука“, 1969.
9. J. W. Lamperti, Semi-stable stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc., **104** (1962), 62-78.
10. J. W. Lamperti, Semi-stable Markov processes (препринт).
11. L. A. Shepp, Explicit Solutions to some Problems of Optimal Stopping, Ann. Math. Statist. **40**, 3(1969), 993-1010.
12. H. M. Taylor, Optimal stopping in a Markov processes, Ann. Math. Statist., **39**, 4 (1968), 1333-1344.
13. M. E. Thompson, Continuous Parameter Optimal Stopping Problems, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, **19** (1971), 302–318.

PUSIAU STABILIŲJŲ DIFUZINIŲ PROCESŲ OPTIMALUSIS STABDYMAS

R. Kudžma

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje pusiau stabiliesiems difuziniams procesams intervale $[0, \infty)$ surasta kainos funkcija (1) ir optimaliojo stabdymo momentas.

OPTIMAL STOPPING OF SEMI-STABLE DIFFUSION PROCESSES

R. Kudžma

(*Summary*)

The paper presents the explicit form of cost function (1) and optimal stopping rule for semistable diffusion processes on an interval $[0, \infty)$.