УДК 519.21

К ЗАДАЧЕ ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДА СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

И. Л. Легостаева

1. Пусть $F_m(C)$ – класс действительных функций

$$f_m(h)=a_0+a_1 h+\ldots+a_m h^m+g(h)h^{m+1},$$

где $h=0,\ \pm\Delta,\ \pm 2\Delta,\ldots,\Delta>0;\ \sup\limits_h|g(h)|\leqslant C,\ -\infty<a_i<\infty,\ i=0,\ 1,\ldots,m.$

Предположим, что известны наблюдения над случайной последовательностью

$$\xi(h)=f_m(h)+\delta(h)$$

для всех h, принадлежащих некоторому множеству $T\subseteq(-\infty,\ \infty)$, где $f_m(h)\in\in F_m(C)$, а $\delta(h)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с

$$M\delta(h)=0;\ M\delta(h)\delta(h')=0,\ h\neq h';\ M\delta^2(h)=\frac{d^2}{\Delta}\cdot$$

Во всем дальнейшем предполагается, что значения m, Δ, d и C фиксированы.

В настоящей заметке, примыкающей к [1], рассматривается задача построения минимаксных линейных оценок коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ по наблюдениям над $\xi(h)$, $h\in T$. Основной результат содержится в теореме 1. В теореме 2 приводится явный вид минимаксных оценок коэффициента a_0 в случае $T=(-\infty,\ \infty)$, $m=0$. В п. 3 даны необходимые доказательства; в п. 4 приводятся минимаксные линейные оценки коэффициентов $a_1,\ \ldots,\ a_m$; в п. 5 рассмотрен вопрос о поведении минимаксных весовых функций при $\Delta\to 0$.

2. Остановимся на некоторых необходимых нам определениях.

Оценкой $\hat{a}_0=\hat{f}(0)$ коэффициента a_0 назовем величину

$$\hat{f}(0)=\sum_{h\in T} l(h)\xi(h)\Delta,$$

характеризуемую весом $l(h)$ из класса измеримых функций

$$\Lambda_m=\left\{l:\ \sum_{h\in T}|h^{m+1}l(h)|\Delta<\infty,\ \sum_{h\in T}l^2(h)\Delta<\infty\right\}\cdot \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{D}(l,f)=M[f(0)-\hat{f}(0)]^2$ – среднеквадратическое отклонение оценки $\hat{f}(0)$ от $f(0)$. Для функций $f\in F_m(h,\ C)$ и $l\in\Lambda_m$ отклонение $\mathfrak{D}(l,f)<\infty$ и

$$\mathfrak{D}(l,\ f)=|f(0)-M\hat{f}(0)|^2+d^2\Delta\sum_{h\in T}l^2(h). \tag{2}$$

Так же, как и в [1], весовую функцию $l^*\in\Lambda_m$ назовем минимаксной (оптимальной), если

$$\sup_{f\in F_m(h,\,C)} \mathfrak{D}(l^*,\,f)=\inf_{l\in\Lambda_m}\ \sup_{f\in F_m(h,\,C)} \mathfrak{D}(l,\,f). \tag{3}$$

Заметим, что, так как

$$\inf_{l\in\Lambda_m}\sup_{f}\mathfrak{D}(l,\,f)=\inf_{\sigma>0}\ \inf_{l\in\Lambda_m^\sigma}\sup_{f}\mathfrak{D}(l,\,f), \tag{4}$$

где $\Lambda_m^\sigma=\Lambda_m\cap\left\{l:\Delta\sum_{h\in T}l^2(h)=\sigma^2<\infty\right\}$, для отыскания оптимальных весов, в классе Λ_m достаточно найти оптимальные весовые функции в классах Λ_m^σ, $\sigma>0$.

Сформулируем теперь основные теоремы.

Теорема 1. 1) **Необходимость.** *Если в классе Λ_m^σ, $m\geqslant0$, существует минимаксная функция $l^\sigma(h)$, то она имеет следующий вид*

$$l^\sigma(h)=\operatorname{sign}P_m(h)\cdot\max\{0;\ |P_m(h)|-\alpha_{m+1}|h^{m+1}|\}, \tag{5}$$

где коэффициенты $\alpha_0,\ldots,\alpha_m$ полинома $P_m(h)=\alpha_0+\alpha_1h+\ldots+\alpha_mh^m$ и константа $\alpha_{m+1}>0$ определяются из $(n+2)$ условий

$$\sum_{h\in T}[l^\sigma(h)]^2\Delta=\sigma^2;\ \sum_{h\in T}l^\sigma(h)\Delta=1;\ \sum_{h\in T}h^q l^\sigma(h)\Delta=0,\ q=1,\ldots,m. \tag{6}$$

2) **Достаточность.** *Если среди функций $l^\sigma(h)$, определенных формулой* (5), *существует такая, для которой выполнены условия* (6) *и при этом $\alpha_{m+1}>0$, то эта функция будет минимаксной в классе Λ_m^σ.*

Пользуясь теоремой 1 в случае $m=0$, можно установить существование минимаксного веса в классе Λ_0 и найти его явный вид.

Теорема 2. *Пусть $T=(-\infty,\ \infty)$. В случае $m=0$ минимаксная весовая функция в классе Λ_0 существует и определяется формулой*

$$l^*(h)=\max\left\{0;\ \frac{2}{\Delta(1+2p)}-\frac{1}{\Delta^2p(1+p)}|h|\right\}. \tag{7}$$

где

$$p=\left[\frac{2}{3\Delta}(\sigma^*)^{-2}\right],$$

а $[x]$ означает целую часть x, δ_* определяется из соотношения

$$\mathfrak{D}(l^{\sigma^*},\,f_l)=\inf_{\sigma>0}\mathfrak{D}(l^\sigma,\,f_l)=\inf_{\sigma>0}\left\{C^2\Delta^2\left(\frac{2}{3\Delta}\sigma^{-2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3\Delta}\sigma^{-2}+1\right]\right)^2+d^2\sigma^2\right\}.$$

Замечание 1. Так же, как и в непрерывном случае, минимаксная весовая функция сосредоточена на конечном интервале $|h|\leqslant2\Delta p(1+p)/(1+2p)$.

Замечание 2. Если $f_m(h)$ — полином степени не выше m, то получаем несмещенные оценки его коэффициентов при помощи функций (5)—(6), (26)—(28).

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. **Необходимость.** Из формулы (2) для каждой функции $l\in\Lambda_m^\sigma$ имеем

$$\mathfrak{D}(l, f)\leqslant\left(\left|a_0\left[1-\sum_{h\in T} l(h)\Delta\right]\right|+\sum_{n=1}^{m}\left|a_n\sum_{h\in T} h^n l(h)\Delta\right|\right)^2+$$
$$+\sum_{h\in T} l^2(h)d^2\Delta. \tag{8}$$

Аналогично [1], $\inf\limits_{l}\sup\limits_{f}\mathfrak{D}(l, f)$ достаточно брать не по всему классу Λ_m^σ, а лишь по классу

$$\tilde{\Lambda}_m^\sigma=\Lambda_m^\sigma\cap\left\{l:\sum_{h\in T} l(h)\Delta=1,\ \sum_{h\in T} h^q l(h)\Delta=0,\qquad q=1,\ \ldots,\ m\right\};$$

получим

$$\inf_{l\in\Lambda_m^\sigma}\sup_f\mathfrak{D}(l, f)=\inf_{l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma}\sup_f\mathfrak{D}(l, f). \tag{9}$$

Для функций $l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma$

$$\mathfrak{D}(l, f)\leqslant C^2\left(\sum_{h\in T}|h^{m+1}l(h)|\Delta\right)^2+d^2\sigma^2=\mathfrak{D}(l). \tag{10}$$

Равенство $\mathfrak{D}(l,f)=\mathfrak{D}(l)$ в (10) достигается на функциях вида

$$f_l(h)=a_0+a_1h+\ldots+a_mh^m+C\operatorname{sign}[h^{m+1}l(h)]h^{m+1}.$$

Следовательно, если $l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma$, то

$$\sup_f\mathfrak{D}(l, f)=\mathfrak{D}(l) \tag{11}$$

и

$$\inf_{l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma}\sup_f\mathfrak{D}(l, f)=\inf_{l\in\Lambda_m^\sigma}\mathfrak{D}(l). \tag{12}$$

Итак, задачу отыскания минимаксной весовой функции в классе Λ_m мы свели к нахождению функции $l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma$, на которой достигается

$$\inf_l\sum_{h\in T}|l(h)h^{m+1}|\Delta \tag{13}$$

при ограничениях

$$\sum_{h\in T} l^2(h)\Delta=\sigma^2;\ \sum_{h\in T} l(h)\Delta=1;\ \sum_{h\in T} h^q l(h)\Delta=0,\quad q=1,\ldots,m. \tag{14}$$

Эта задача решается методом Лагранжа. Составим функцию (см. [1])

$$\mathcal{H}(l, h)=\mathcal{H}(l=\{l_h=l(h),\ h\in T\},\ h)=$$
$$=-\sum_{h\in T}|l_hh^{m+1}|\Delta+\sum_{q=0}^{m}\left(\tilde{\alpha}_q\sum_{h\in T} h^q l_h\right)\Delta-\tilde{\alpha}_{m+1}\sum_{h\in T} l_h^2\Delta-$$
$$-\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_{m+1}\sigma^2,\ \tilde{\alpha}_{m+1}>0. \tag{15}$$

Заметим, что если множество T — конечно, то все дальнейшие переходы под знаками суммирования законны. Пусть T — бесконечно, тогда нам потребуется абсолютная сходимость рядов.

Из (13) следует, что для существования конечного

$$\inf_{l} \sum_{h\in T} |l_h h^{m+1}|\Delta$$

необходимо, чтобы

$$\sum_{h\in T} |l_h h^{m+1}|\Delta<\infty.$$

Введем $T_1=\{h:h\geqslant 1\}$, $T_2=T\setminus T_1$. Тогда $T=T_1+T_2$. $T_2=\{h:h<1\}=\left\{h=k\Delta:k<\frac{1}{\Delta}\right\}$. Но $\Delta>0$ фиксировано, поэтому $\left[\frac{1}{\Delta}\right]=N-$ некоторое конечное число, и T_2 конечно.

Рассмотрим

$$\sum_{h\in T} l_h^2\Delta=\sigma^2<\infty.$$

Этот ряд сходится, и притом абсолютно, следовательно, $l_h^2<\infty$ и $|l_h|<\infty$.

Возьмем

$$\sum_{h\in T} |l_h h^q|\Delta=\sum_{h\in T_1} |l_h h^q|\Delta+\sum_{h\in T_2} |l_h h^q|\Delta, \qquad q=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

$|l_h h^q|\Delta<\infty$ и, т. к. суммирование при $h\in T_2$ конечно, $\sum_{h\in T_2} |l_h h^q|\Delta=K<\infty$.

Далее пусть $h\in T_1$. Здесь $h\geqslant 1$, поэтому

$$|l_h h^{m+1}|\Delta\geqslant|l_h h^q|\Delta, \qquad q=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Тогда

$$\infty>\sum_{h\in T} |l_h h^{m+1}|\Delta\geqslant\sum_{h\in T_1} |l_h h^{m+1}|\Delta\geqslant\sum_{h\in T_1} |l_h h^q|\Delta$$

и

$$\sum_{h\in T} |l_h h^q|\Delta=\sum_{h\in T_1} |l_h h^q|\Delta+\sum_{h\in T_2} |l_h h^q|\Delta\leqslant\sum_{h\in T_1} |l_h h^q|\Delta+K<\infty.$$

Следовательно, все ряды в (15) сходятся абсолютно, и

$$\mathcal{H}(l,\ h)=\sum_{h\in T}\left\{-|h^{m+1}l_h|+\left(\sum_{q=0}^{m}\tilde\alpha_q h^q\right)l_h-\tilde\alpha_{m+1}l_h^2\right\}\Delta-\tilde\alpha_0-\tilde\alpha_{m+1}\sigma^2.$$

Требуется найти $l^*:\mathcal{H}(l^*,\ h)=\max_l\mathcal{H}(l,\ h)$. Так как два последних члена в $\mathcal{H}(l,\ h)$ не зависят от l, то будем искать

$$\max_l\mathcal{H}(l,H)=\Delta\cdot\max_l\sum_{h\in T}\left\{-|l_h h^{m+1}|+\tilde P_m(h)l_h-\tilde\alpha_{m+1}l_h^2\right\},$$

где $\tilde P_m(h)=\tilde\alpha_0+\tilde\alpha_1 h+\ \ldots\ +\tilde\alpha_m h^m$.

Заметим, что

$$\mathcal{H}(l,h)\leqslant\Delta\sum_{h\in T}\{-|h^{m+1}l_h|+|\tilde P_m(h)l_h|-\tilde\alpha_{m+1}l_h^2\}=$$

$$=\mathcal{H}\left(v=\{v_h=|l_h|\cdot\operatorname{sign}\tilde P_m(h)\},\ h\right)\equiv\mathcal{H}(v,h)$$

или

$$\mathcal{H}(v,h)=\sum_{h\in T}\{-|h^{m+1}|v_h+|\tilde{P}_m(h)|v_h-\tilde{\alpha}_{m+1}v_h^2\}\Delta=$$

$$=\Delta\sum_{h\in T}\mathcal{H}(v_h,\ h),\ v_h\geqslant 0. \tag{16}$$

Если теперь $\max\limits_{v}\mathcal{H}(v,\ h)$ существует и достигается при $v=v^*$, то существует и $\max\limits_{l}\mathcal{H}(l,\ h)$, причем $\max\limits_{l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma}\mathcal{H}(l,\ h)=\mathcal{H}(v^*,\ h)$. Далее, т. к. всегда можно выбрать такие v_h, что $\mathcal{H}(v_h,\ h)\geqslant 0$, то, как легко показать,

$$0\leqslant\max_{v}\mathcal{H}(v,\ h)=\max_{v_h}\sum_{h\in T}\mathcal{H}(v_h,\ h)=\sum_{h\in T}\max_{v_h}\mathcal{H}(v_h,\ h) \tag{17}$$

и $\max\limits_{v_h}\mathcal{H}(v_h,\ h)$ достигается на функциях

$$v_h^*=\max\left\{0;\ \frac{1}{2\tilde{\alpha}_{m+1}}\ [|\tilde{P}_m(h)|-|h^{m+1}|]\right\},\ \tilde{\alpha}_{m+1}>0, \tag{18}$$

и

$$l^\sigma(h)=l_h^\sigma=v_h^*\operatorname{sign}\tilde{P}_m(h)=\operatorname{sign}P_m(h)\max\{0;\ |P_m(h)|-\alpha_{m+1}|h^{m+1}|\}, \tag{19}$$

где

$$P_m(h)=\frac{1}{2\tilde{\alpha}_{m+1}}\ \tilde{P}_m(h)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h^i,\ \alpha_{m+1}=\frac{1}{2\tilde{\alpha}_{m+1}}\ ,$$

а коэффициенты $\alpha_{m+1}>0$, α_0, ..., α_m определяются из условий (14).

Итак, оценка $\hat{a}_0=\hat{f}(0)$ имеет вид

$$\hat{a}_0=\sum_{h\in T}\xi(h)l_h^\sigma\Delta. \tag{20}$$

Достаточность. Предположим, что нашлись константы $\beta_{m+1}>0$, β_0, ..., β_m, для которых l_h^σ, определенная равенством (19) с $\alpha_{m+1}=\beta_{m+1}$ и $P_m(h)=\sum\limits_{i=0}^{m}\beta_i h^i$ такова, что для нее выполнены условия (14). Тогда из (17) для всех $h\in T$

$$\mathcal{H}(l_h^\sigma,\ h)\geqslant\mathcal{H}(l_h,\ h),\qquad l_h\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma, \tag{21}$$

где

$$\mathcal{H}(l_h,\ h)=-\beta_{m+1}|l_h h^{m+1}|+P_m(h)l_h-l_h^2.$$

Суммируя (21) по $h\in T$ и учитывая условия (14), получаем

$$-\beta_{m+1}\sum_{h\in T}|h^{m+1}l_h^\sigma|\geqslant-\beta_{m+1}\sum_{h\in T}|h^{m+1}l_h|.$$

Поскольку $\beta_{m+1}>0$, $\sum\limits_{h\in T}|h^{m+1}l_h^\sigma|\leqslant\sum\limits_{h\in T}|h^{m+1}l_h|$ для всех $l\in\tilde{\Lambda}_m^\sigma$, что противоречит оптимальности функции l_h^σ.

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $T=(-\infty,\ \infty)$, $m=0$. Наблюдается процесс

$$\xi(h)=a_0+hg(h)+\delta(h),$$

где

$$|g(h)|\leqslant C,\ |a_0|<\infty,\ M\delta(h)=0,\ M\delta^2(h)=\frac{d^2}{\Delta},\ M\delta(h)\delta(h')=0,\ h\neq h'.$$

Оптимальный вес для оценки $\hat{a}_0=\sum\limits_{h\in T}\xi(h)l^\sigma(h)\Delta$ в силу теоремы 1 имеет вид

$$l^\sigma(h)=\operatorname{sign}\alpha_0\cdot\max\{0;\ |\alpha_0|-\alpha_1|h|\},\tag{22}$$

где коэффициенты $\alpha_0,\ \alpha_1>0$ определяются из условий

$$\sum_{h\in T}l^\sigma(h)\Delta=1,\quad \sum_{h\in T}\left(l^\sigma(h)\right)^2\Delta=\sigma^2.\tag{23}$$

Заметим сразу, что $\alpha_0>0$, иначе $\sum\limits_{h\in T}l^\sigma(h)\Delta<0$. Тогда

$$l^\sigma(h)=\max\{0;\ \alpha_0-\alpha_1|h|\}=\max\{0;\ \alpha_0-\alpha_1|k\Delta|\},\ k=0,\ \pm1,\ \ldots\ .$$

Подставляя $l^\sigma(h)$ в систему (23) и делая замены

$$\tilde{\alpha}_0=\alpha_0,\ \tilde{\alpha}_1=\alpha_1\Delta^2,\ \tilde{\sigma}^2=\sigma^2\Delta,\ \frac{\alpha_0}{\Delta\alpha_1}=\frac{\tilde{\alpha}_0\Delta}{\tilde{\alpha}_1}=\Theta,\ [\Theta]=p,$$

получаем систему для определения неизвестных Θ и $\tilde{\alpha}_1$:

$$\begin{cases}(1+2p)\Theta-p(1+p)=\tilde{\alpha}_1^{-1},\\ (1+2p)\Theta^2-2p(1+p)\Theta+\frac{1}{3}(1+2p)(1+p)p=\tilde{\sigma}^2\tilde{\alpha}_1^{-2},\end{cases}$$

где $\tilde{\sigma}^2<\infty$ фиксировано.

Решение этой системы существует и единственно:

$$\Theta=\frac{2}{3}\tilde{\sigma}^{-2}=\frac{2p(1+p)}{1+2p},\ \tilde{\alpha}_1=\frac{1}{p(1+p)},$$

отсюда

$$p=[\Theta]=\left[\frac{2}{3\Delta}\sigma^{-2}\right],\ \alpha_0=\frac{2}{\Delta(1+2p)},\ \alpha_1=\frac{1}{\Delta^2p(1+p)}$$

и $(h=k\Delta)$

$$l^\sigma(h)=\max\left\{0;\ \frac{2}{\Delta(1+2p)}-\frac{1}{\Delta^2p(1+p)}|k\Delta|\right\}.\tag{24}$$

Введем

$$\rho_h(C,\ d)=\inf_l\sup_f\mathfrak{D}(l,\ f)=\inf_{\sigma>0}\mathfrak{D}(l^\sigma,\ f_l),\tag{25}$$

где

$$f_l(h)=a_0+a_1h+\ldots+a_mh^m+C\,h^{m+1}\operatorname{sign}(h^{m+1}l_h^\sigma).$$

Для функции (24)

$$\mathfrak{D}(l^\sigma,\ f_l)=C^2\left(\sum_{h\in T}|l_h^\sigma h\Delta|\right)^2+d^2\sigma^2.$$

Переходя от p к $\sigma^2:p=\left[\frac{2}{3\Delta}\sigma^{-2}\right]$, получаем

$$\mathfrak{D}(l^\sigma,\ f_l)=C^2\Delta^2\left(\frac{2}{3\Delta}\sigma^{-2}-\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3\Delta}\sigma^{-2}+1\right]\right)^2+d^2\sigma^2$$

и нужно теперь найти σ^*:

$$\mathfrak{D}(l^{\sigma^*}, f_l) = \inf_{\sigma>0} \mathfrak{D}(l^{\sigma}, f_l).$$

4. Пусть теперь требуется оценить коэффициент a_k, $k=1, \ldots, m$.

Введем функцию $\varphi_m(t) = a_0 + \ldots + a_m t^m + g(t)\, t^{m+1}$ ($t \in T$, t — непрерывно) такую, что $\varphi_m(h) = f_m(h)$. Для оценивания a_k требуем, чтобы функция $g(t)$ была k раз дифференцируема и

$$\sup_{t\in T} |g^{(i)}(t)| \leqslant C_i < \infty \qquad i=1, \ldots, k.$$

Тогда $k!\, a_k = \varphi_m^{(k)}(0)$. Величину $\varphi_m^{(k)}(0)$ обозначим через $f_m^{(k)}(0)$, тогда $a_k = \frac{1}{k!} f_m^{(k)}(0)$.

Оценивать a_k будем по результатам наблюдений над процессом $\xi(h) = f_m(h) + \delta(h)$ при помощи функционала

$$k!\hat{a}_k = \hat{f}^{(k)}(0) = \sum_{h\in T} l_k(h)\, \xi(h)\, \Delta, \tag{26}$$

где $l_k(h) \in \Lambda_m$; индекс k функции $l_k(h)$ означает номер оцениваемого коэффициента a_k.

Аналогично задаче оценивания a_0, получаем

$$l_k^{\sigma}(h) = \operatorname{sign} P_m^{(k)}(t) \max \left\{0;\ |P_m^{(k)}(t)| - \psi_0 \sum_{j=0}^{k} \gamma_j\, |t^{m+1-j}|\right\}, \tag{27}$$

где

$$l_k^{\sigma}(h) \in \Lambda_m^{\sigma} \text{ и } \gamma_j = \binom{k}{j} \frac{(m+1)!}{(m+1-j)!} C_{k-j},\ C_{k-j} = \sup_{h\in T} |g^{(k-j)}(h)|,\ P_m^{(k)}(h) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{(k)} h^i$$

коэффициенты $\alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}$ и $\alpha_{m+1}^{(k)} > 0$ определяются из условий

$$\sum_{h\in T} l_k^2(h)\, \Delta = \sigma^2;\quad \sum_{h\in T} h^k l_k(h)\, \Delta = 1;\quad \sum_{h\in T} h^q l_k(h) = 0,$$
$$q = 0, \ldots, m;\ q \neq k. \tag{28}$$

Оценка a_k имеет вид

$$\hat{a}_k = \frac{1}{k!} \sum_{h\in T} l_k(h)\, \xi(h)\, \Delta.$$

5. В работе [1] и в настоящей заметке были рассмотрены две задачи. Требовалось оценить коэффициенты функции

$$1)\ \varphi_m(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m + q(t)\, t^{m+1} \tag{29}$$

по наблюдениям над случайным процессом

$$\xi(t) = \varphi_m(t) + \eta(t), \tag{30}$$

где $M\eta(t) = 0$, $M\eta(t)\eta(s) = d^2\delta(t-s)$; $|q(t)| \leqslant C$, $|a_i| < \infty$, $i = 0, 1, \ldots, m$ (см. [1]), и оценить коэффициенты функции,

$$2)\ f_m(h) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 h + \ldots + \tilde{a}_m h^m + g(h)\, h^{m+1} \tag{31}$$

по наблюдениям над случайной последовательностью $(h \in T)$

$$\xi(h) = f_m(h) + \delta(h), \tag{32}$$

где $h = k\Delta$, $\Delta > 0$, k — целое, $M\delta(h) = 0$, $M\delta^2(h) = \Delta^{-1}d^2$, $M\delta(h)\ \delta(h') = 0$, $h \neq h'$, $|g(h)| \leqslant C$; $|\tilde{a}_i| < \infty$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Для простоты выкладок рассмотрим оценки коэффициентов a_0 и $\tilde{a}_0$, которые брались в виде

$$\hat{a}_0 = \hat{\varphi}_m(0) = \int_T l_0(t)\,\xi(t)\,dt \tag{33}$$

для непрерывного процесса, и для дискретного —

$$\hat{\tilde{a}}_0 = \hat{f}_m(0) = \sum_{h \in T} l_0(h)\,\xi(h)\,\Delta. \tag{34}$$

Соответственно в результате получили

$$l_0(t) = \operatorname{sign} P_m(t) \max\{0;\ |P_m(t)| - \psi_0 |t^{m+1}|\}, \qquad l_0(t) \in L_m, \tag{35}$$

где $P_m(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m$ и коэффициенты $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ и $\psi_0 > 0$ определяются из условий

$$\int_T l_0(t)\,dt = 1, \quad \int_T l_0^2(t)\,dt = \sigma^2, \quad \int_T t^q l_0(t)\,dt = 0, \quad q = 1, \ldots, m, \tag{36}$$

и

$$l_0(h) = \operatorname{sign} P_m(h) \max\{0;\ |P_m(h)| - \tilde{\psi}_0 |t^{m+1}|\}, \qquad l_0(h) \in \Lambda_m, \tag{37}$$

где $P_m(h) = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 t + \ldots + \tilde{\alpha}_m t^m$ и коэффициенты $\tilde{\alpha}_0, \ldots, \tilde{\alpha}_m$ и $\tilde{\psi}_0 > 0$ определяются из условий

$$\sum_{h \in T} l_0(h)\,\Delta = 1; \quad \sum_{h \in T} l_0^2(h)\,\Delta = \sigma^2; \quad \sum_{h \in T} h^q l_0(h)\,\Delta = 0, \quad q = 1, \ldots, m. \tag{38}$$

Записи этих функций одинаковы, различны $(n+2)$ условия, определяющие коэффициенты функций $l_0(t)$ и $l_0(h)$. Функция $l_0(u)$ в (38) непрерывна (если u непрерывно) и ограничена.

Заметим, что полученные оптимальные веса сосредоточены на конечном интервале.

Действительно, из сходимости $\int_T l_0^2(t)\,dt < \infty$ следует, что $|l_0(h)|$ ограничена, следовательно, ограничены и ее коэффициенты, и

$$|t| \leqslant 1 + \frac{1}{\psi_0} \max(|\alpha_0|, \ldots, |\alpha_m|) \leqslant T_1 < \infty.$$

Аналогично в дискретном случае

$$|h| \leqslant 1 + \frac{1}{\tilde{\psi}_0} \max(|\tilde{\alpha}_0|, \ldots, |\tilde{\alpha}_m|) \leqslant T_2 < \infty.$$

Следовательно, суммы в (38) можно рассматривать как интегральные суммы.

Фиксируем множество $T = [-\tilde{T}, \tilde{T}]$, $\tilde{T} = \max(T_1, T_2)$. Пусть $\Delta^{(0)} = 1$, $\Delta^{(n)} = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, мы заполняем наш отрезок двоично-

-рациональными точками. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в условии (38), получаем ($h^{(n)} = k\Delta^{(n)}$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h^{(n)}\in T} l_0(h^{(n)})\Delta^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\{k:k\Delta^{(n)}\in T\}} l_0(k\Delta^{(n)})\Delta^{(n)} = \int_T l_0(t)\,dt = 1,$$

$$0 = \sum_{h^{(n)}\in T} (h^{(n)})^q l_0(h^{(n)})\Delta^{(n)} \Rightarrow \int_T t^q l_0(t)\,dt = 0, \qquad q = 1, \ldots, m,$$

$$\sigma^2 = \sum_{h^{(n)}\in T} l_0^2(h^{(n)})\Delta^{(n)} \Rightarrow \int_T l_0^2(t)\,dt = \sigma^2,$$

тогда $\tilde{\Lambda}_m^\sigma \to \tilde{L}_m^\sigma$ и

$$l_0(h) \to l_0(t) \text{ при } \Delta \to 0, \qquad h,\ t \in T.$$

Покажем, что $T_1 = T_2 = T$.

В самом деле, пусть $T_1 > T_2$. Тогда $T_1 \backslash T_2 = T_3 \neq \varnothing$ и $T = T_1$. Но $l(h) \equiv 0$ при $h \in T_3$ и

$$\sigma^2 = \sum_{h\in T} l^2(h)\Delta = \sum_{h\in T_2} l^2(h)\Delta + \sum_{h\in T_3} l^2(h)\Delta = \sum_{h\in T_2} l^2(h)\Delta.$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, имеем

$$\sigma^2 = \sum_{h\in T_2} l^2(h)\Delta \Rightarrow \int_{T_2} l^2(t)\,dt = \sigma^2,$$

но

$$\sigma^2 = \int_T l^2(t)\,dt = \int_{T_2} l^2(t)\,dt + \int_{T_3} l^2(t)\,dt,$$

значит, $\int_{T_3} l^2(t)\,dt = 0$, а т. к. $l(t)$ непрерывна (см. (35)), $T_3 \neq \varnothing$, то $l(t) \equiv 0$ при $t \in T_3$.

Отсюда $T = T_2 = T_1$.

Рассмотрим теперь случай $T_2 > T_1$: $T_2 \backslash T_1 = T_4 \neq \varnothing$ и $T = T_2$. Путем подобных рассуждений получаем $T = T_1 = T_2$.

Итак, $T_1 = T_2$.

Построим предельный переход в примере $m = 0$, $T = (-\infty, \infty)$. Мы имели (см. (24))

$$l_0(h) = \max\left\{0;\ \frac{2}{\Delta(1+2p)} - \frac{1}{\Delta^2 p(1+p)}\,|k\Delta|\right\},$$

где $h = R\Delta$ и

$$p = [\Theta] = \left[\frac{2}{3\Delta}\,\sigma^{-2}\right] = \left[\frac{b}{\Delta}\right],\quad b = \frac{2}{3}\,\sigma^{-2},$$

$\sigma^2 < \infty$ — задане.

Посмотрим, как изменяются коэффициенты при $\Delta \to 0$ ($n \to \infty$)

$$\Delta^2 p(1+p) = \Delta^2\left[\frac{b}{\Delta}\right] + \Delta^2\left[\frac{b^2}{\Delta^2}\right] = \frac{\Delta}{b}\left[\frac{b}{\Delta}\right](\Delta b) + \frac{\Delta^2}{b^2}\left[\frac{b^2}{\Delta^2}\right] b^2 \to b^2,$$

$$\Delta(1+2p) = \Delta + 2b\,\frac{\Delta}{b}\left[\frac{b}{\Delta}\right] \to 2b.$$

Тогда

$$\frac{2}{\Delta(1+2p)} \to \frac{2}{2b} = \frac{3}{2}\sigma^2 = \alpha_0,$$

$$\frac{1}{\Delta^2 p(1+p)} \to \frac{1}{b^2} = \frac{9}{4}\sigma^4 = \psi_0.$$

Следовательно, при $\Delta \to 0$

$$l_0(h) = \max\left\{0;\ \frac{2}{\Delta(1+2p)} - \frac{1}{\Delta^2 p(1+p)}\ |h|\right\} \to$$

$$\to l_0(t) = \max\left\{0;\ \frac{3}{2}\sigma^2 - \frac{9}{4}\sigma^4 |t|\right\}$$

и (см. (25))

$$\rho_h(C,\ d) \to \rho_t(C,\ d).$$

Таким образом, решение задачи для непрерывного процесса $\xi(t)$ при $m=0$, $t \in T$, приближается решениями задачи для случайной последовательности $\xi(h)$ при $m=0$, $h=k\Delta \in T$.

Автор пользуется случаем выразить благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и постоянное внимание к ее решению.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 6.V.1971

Литература

1. И. Л. Легостаева, А. Н. Ширяев, Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса, Теор. вер. и ее примен., **XVI**, 2 (1971), 339–345.

APIE ATSITIKTINĖS SEKOS TRENDO IŠSKYRIMO UŽDAVINĮ

I. Legostajeva

(Reziumė)

Sakysime, $F_m(C)$ – pavidalo

$$f(h) = a_0 + \ldots + a_m h^m + g(h) h^{m+1}$$

realių funkcijų klasė; čia

$$\sup_h |g(h)| \leqslant C < \infty,\ h=0,\ \pm\Delta,\ \pm 2\Delta,\ \ldots,\ \Delta>0,\ h\in T \subseteq (-\infty,\ \infty).$$

Įvertinamas regresijos koeficientas $a_0 = f(0)$ pagal reikšmes

$$\xi(h) = f(h) + \delta(h),\ \delta(h): M\delta(h)=0,\ M\delta^2(h) = \frac{d^2}{\Delta},\ M\delta(h)\delta(h')=0,\ h \neq h'.$$

Tiesinių įvertinimų

$$\hat{f}(0) = \sum_{h\in T} l(h)\xi(h)\Delta$$

klasei svorį $l^*(h)$ vadinsime minimaksiniu (optimaliu), jei

$$\sup_{f\in F_m(C)} \mathfrak{D}(l^*,\ f) = \inf_l \sup_{f\in F_m(C)} \mathfrak{D}(l,\ f),$$

kur $\mathfrak{D}(l,\ f) = M[f(0) - \hat{f}(0)]^2$.

Pirmojoje teoremoje nustatytos svorio optimalumo būtinos ir pakankamos sąlygos, antroje teoremoje surastas optimalus svoris tuo atveju, kai $n=0$.

ON THE TREND DETECTION PROBLEM FOR A STOCHASTIC SEQUENCE

I. Legostayeva

(*Summary*)

Let $F_m(C)$ be the class of real functions of the form

$$f(h)=a_0+\ldots+a_m t^m+g(h)\,h^{m+1}$$

where

$$\sup_h |g(h)|\leqslant C<\infty,\ h=0,\ \pm\Delta,\ \pm 2\Delta,\ \ldots,\ \Delta>0,\ h\in T\subseteq(-\infty,\ \infty).$$

The problem considered is to estimate the regression coefficient $a_0=f(0)$ from the data $\xi(h)=$ $=f(h)+\delta(h)$, $\delta(h)$ being a sequence of a white noise process

$$M\delta(h)=0,\ M\delta^2(h)=\frac{d^2}{\Delta},\ M\delta(h)\,\delta(h')=0,\ h\neq h'.$$

For the class of linear estimators

$$\hat{f}(0)=\sum_{h\in T} l(h)\,\xi(h)\,\Delta$$

a weight $l^*(h)$ is called minimax (optimal) if

$$\sup_{f\in F_m(C)} \mathfrak{D}(l^*,\ f)=\inf_l \sup_{f\in F_m(C)} \mathfrak{D}(l,\ f),$$

where $\mathfrak{D}(l,f)=M[f(0)-\hat{f}(0)]^2$.

Theorem 1 gives necessary and sufficient conditions for a weight to be optimal. For $n=0$ optimal weight is obtained in theorem 2.