XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 519.21

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Ф. Ф. Мишейкис

1. Пусть дана какая-нибудь последовательность независимых случайных величин (н.с.в.)

$$\xi_1, \xi_2, \ldots . \tag{1}$$

Предположим, что мы можем найти такие числа $B_n>0$ и A_n, что будет существовать предел в смысле слабой сходимости

$$G_n(x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x), \tag{2}$$

где $G(x)$ является функцией распределений (ф.р.), а

$$G_n(x)=P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j-A_n<x\right\}.$$

Если при этом существуют такие числа a_{nj} ($j=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$), что при любом $\varepsilon>0$

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n} P\left\{\left|\frac{\xi_j}{B_n}-a_{nj}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

то говорят, что последовательность н.с.в. (1) удовлетворяет условию предельной пренебрегаемости слагаемых. В этом случае стоящие в пределе (2) ф.р. $G(x)$ образуют известный класс распределений L.

Следуя М. Лоэву [1], мы будем говорить, что ф.р. $G(x)\in L_c$ $(0<c<1)$, если можно найти такую ф.р. $F(x)$, что будет выполнено равенство

$$G(x)=F(x) * G\left(\frac{x}{c}\right). \tag{3}$$

В [1] доказано следующее утверждение.

Теорема А. *Ф. р. $G(x)\in L_c$ $(0<c<1)$ тогда и только тогда, когда можно найти такую последовательность н.с.в.* (1) *и такие константы $B_n>0$ и A_n, что в пределе* (2) *будет стоять именно ф.р. $G(x)$ и при этом будет выполняться соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n-1}}{B_n}=c.$$

М. Лоэв также показал, что условие предельной пренебрегаемости слагаемых эквивалентно условиям

$$\lim_{n\to\infty} B_n=\infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n} = 1.$$

Поэтому класс распределений L в [1] обозначается также $L_{\{1\}}$. В состав класса $L_{\{0\}}$ включены все распределения. Сказанное показывает, что класс распределений L_c $(0 \leqslant c \leqslant 1)$ мы можем ввести при помощи следующего определения.

Определение 1. Будем говорить, что ф.р. $G(x) \in L_c$ $(0 \leqslant c \leqslant 1)$, если можно найти такие константы $B_n > 0$ и A_n, что в пределе (2) будет стоять именно ф.р. $G(x)$ и при этом будут выполнены условия

$$1)\ \lim_{n\to\infty} B_n = \infty,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n} = c.$$

Условие 1) необходимо лишь в случае $c=1$. В остальных случаях оно является следствием условия 2). Действительно, если было бы $\lim\limits_{n\to\infty} B_n < \infty$, то необходимо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n} = 1.$$

Нам осталось показать, что оба определения класса L_c эквивалентны и в случае $c=0$.

Теорема 1. *Классу распределений $L_{\{0\}}$, введенному при помощи определения* 1, *принадлежат все распределения.*

Доказательство. Пусть $g(t)$ — произвольная характеристическая функция (х.ф.). Рассмотрим последовательность н.с.в.

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$$

с х.ф.

$$g(tB_1),\ g(tB_2),\ \ldots,\ g(tB_n),\ \ldots$$

соответственно, где константы $B_n > 0$ удовлетворяют условиям:

$$1)\ \frac{B_{n-1}}{B_n} \leqslant \frac{1}{n},$$

$$2)\ \min_{t\in[-n,n]} \left| \prod_{i=1}^{n-1} g\left(\frac{B_i}{B_n} t\right) \right| \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Понятно, что такую последовательность констант $\{B_n\}$ всегда можно найти. В качестве нормирующих констант возьмем ту же последовательность $\{B_n\}$. Обозначим

$$G_n'(x) = P\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k < x\right\}.$$

Тогда

$$\int e^{itx}\, dG_n'(x) = g(t)\left[\prod_{i=1}^{n-1} g\left(\frac{B_i}{B_n} t\right)\right] \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} g(t).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n}=0,$$

то распределение $G(x)$ с х.ф. $g(t)$ принадлежит классу $L_{\{a\}}$.

Теорема доказана.

В дальнейшем условия 1) и 2), сформулированные в определении 1, будем называть условием c-пренебрегаемости $(0\leqslant c\leqslant 1)$. Обозначим

$$F_n(x)=P\left\{\frac{\xi_n}{B_n}-\frac{A_nB_n-A_{n-1}B_{n-1}}{B_n}<x\right\}.$$

Тогда будет выполнено равенство

$$G_n(x)=F_n(x) * G_{n-1}\left(\frac{B_n}{B_{n-1}}x\right). \tag{4}$$

Условие c-пренебрегаемости означает, что если пренебречь „последним членом"

$$\frac{\xi_n}{B_n}-\frac{A_nB_n-A_{n-1}B_{n-1}}{B_n}$$

нормированной и центрированной n-й частной суммы, то

$$G_{n-1}\left(\frac{B_n}{B_{n-1}}x\right)\underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G\left(\frac{x}{c}\right)$$

(в случае $c=0$ условимся считать $G\left(\frac{x}{c}\right)=E(x)$, где

$$E(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ 1, \text{ если } x>0).\end{cases}$$

2. В следующих двух теоремах условие c-пренебрегаемости не используется.

Теорема 2. *Если в пределе* (2) *стоит собственная ф.р.* $G(x)$, *то существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

Доказательство. Допустим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$ не существует. Тогда найдутся две подпоследовательности $\{n_k\}$ и $\{n'_k\}$ такие, что при $k\to\infty$ $B_{n_k}\to B$ и $B_{n'_k}\to B'$, где $B\neq B'$. Можно считать $n'_k<n_k<n'_{k+1}$. Обозначим

$$\overline{F}_{n_k}(x)=P\left\{\frac{1}{B_{n_k}}\sum_{j=n'_k+1}^{n_k}\xi_j-\frac{A_{n_k}B_{n_k}-A_{n'_k}B_{n'_k}}{B_{n_k}}<x\right\}$$

и

$$\overline{F}'_{n'_k}(x)=P\left\{\frac{1}{B_{n'_{k+1}}}\sum_{j=n_k+1}^{n'_{k+1}}\xi_j-\frac{A_{n'_{k+1}}B_{n'_{k+1}}-A_{n_k}B_{n_k}}{B_{n'_{k+1}}}<x\right\}.$$

Тогда

$$G_{n_k}(x)=\overline{F}_{n_k}(x) * G_{n'_k}\left(\frac{B_{n_k}}{B_{n'_k}}x\right)$$

и

$$G_{n'_{k+1}}(x)=\overline{F}'_{n'_k}(x) * G_{n_k}\left(\frac{B_{n'_{k+1}}}{B_{n_k}}x\right). \tag{5}$$

Пусть B, $B'<\infty$. В силу теоремы о слабой компактности ([2], стр. 192) найдется подпоследовательность $\{k\ (l)\}$ такая, что $F_{n_{k'(l)}}(x) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} \bar{F}(x)$, где $\bar{F}\ (x)$ ф.р. Поскольку

$$G_n(x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x) \text{ и } G_{n'_k}\left(\frac{B_{n_k}}{B_{n'_k}}\, x\right) \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} G\left(\frac{B}{B'}\, x\right),$$

то получаем, что должно выполняться равенство

$$G(x)=\bar{F}(x) * G\left(\frac{B}{B'}\, x\right). \tag{6}$$

Аналогично получаем, что для некоторой подпоследовательности $\{k\ (l)\}$ $\bar{F}'_{n'_{k(l)}}(x) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} \bar{F}'(x)$, где $\bar{F}'(x)$ ф. р., и

$$G(x)=\bar{F}'(x) * G\left(\frac{B'}{B}\, x\right). \tag{7}$$

В равенстве (7), заменяя x на Bx/B', получаем

$$G\left(\frac{B}{B'}\, x\right)=\bar{F}'\left(\frac{B}{B'}\, x\right) * G(x).$$

Теперь из (6) следует, что

$$G(x)=\bar{F}(x) * \bar{F}'\left(\frac{B}{B'}\, x\right) * G(x),$$

откуда получаем ([3], стр. 62), что должно быть

$$\bar{F}(x) * \bar{F}'\left(\frac{B}{B'}\, x\right)=E(x).$$

Полученное противоречие показывает, что $B=B'$.

Пусть теперь $B=\infty$. В равенстве (5), всюду заменяя x на $B_{n_k}x/B_{n'_{k+1}}$ получаем

$$G_{n'_{k+1}}\left(\frac{B_{n_k}}{B_{n'_{k+1}}}\, x\right)=\bar{F}'_{n'_k}\left(\frac{B_{n_k}}{B_{n'_{k+1}}}\, x\right) * G_{n_k}(x).$$

Найдется подпоследовательность $\{k\ (l)\}$ такая, что

$$\bar{F}'_{n'_{k(l)}}\left(\frac{B_{n_{k(l)}}}{B_{n'_{k(l)+1}}}\, x\right) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} \bar{\bar{F}}(x),$$

где $F\ (x)$ ф.р. Если допустить, что $B'<\infty$, то получим

$$E(x)=\bar{\bar{F}}(x) * G(x),$$

что невозможно, поскольку $G\ (x)$ собственная ф.р.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в пределе* (2) *стоит собственная ф.р.* $G\ (x)$, *то всегда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{B_{n-1}}{B_n} \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть утверждение нашей теоремы неверно. Тогда найдется подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что будет существовать предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_{n_k-1}}{B_{n_k}}=c>1,$$

и по теореме о слабой компактности найдется подпоследовательность $\{k(l)\}$ такая, что $F_{n_{k(l)}}(x) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, где $F(x)$ ф.р. Переходя в равенстве

$$G_{n_{k(l)}}(x)=F_{n_{k(l)}}(x) * G_{n_{k(l)}-1}\left(\frac{B_{n_{k(l)}}}{B_{n_{k(l)}}}x\right)$$

к пределу при $l\to\infty$, получаем соотношение

$$G(x)=F(x) * G\left(\frac{x}{c}\right).$$

Пусть х.ф. $g(t)$ и $f(t)$ соответствует ф.р. $G(x)$ и $F(x)$. Тогда

$$g(t)=f(t)g(ct),$$

откуда для каждого $j\geqslant 1$

$$g(t)=\left[\prod_{i=0}^{j-1} f(c^i t)\right]g(c^j t). \tag{8}$$

Поскольку $|g(t)|\not\equiv 1$, то найдется точка t_0, где $|g(t_0)|=a<1$. Берем последовательность $t_j=t_0c^{-j}$. Используя равенство (8), в каждой точке t_j получаем

$$g(t_j)=\left[\prod_{i=0}^{j-i} f(c^{i-j}t_0)\right]g(t_0),$$

откуда следует, что для $j=1, 2, \ldots$

$$|g(t_j)|\leqslant a.$$

Поскольку $t_j \underset{j\to\infty}{\to} 0$, то оказывается, что $g(t)$ не может быть х.ф.

Теорема доказана.

Пусть при константах $B_n>0$ и A_n в пределе (2) стоит собственная ф.р. $G(x)$, а при константах $\tilde{B}_n>0$ и $\tilde{A}_n$

$$P\left\{\frac{1}{\tilde{B}_n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\tilde{A}_n<x\right\}\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}\tilde{G}(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ — ф.р. Известна следующая теорема.

Теорема Б ([2], стр. 46). *Если предельные ф.р.* $G(x)$ и $G(x)$, *полученные для последовательности н.с.в.* (1), *собственные, то найдутся константы* a, $0<a<\infty$, *и* b, $-\infty<b<\infty$, *такие, что* $\tilde{G}(x)=G(ax+b)$ *и*

$$\frac{\tilde{B}_n}{B_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a.$$

Используя теорему 2 и теорему Б, легко установить следующее утверждение.

Теорема 4. *Все последовательности н.с.в. распадаются на три непересекающиеся группы.*

1-*я группа. Последовательность н.с.в. этой группы ни при каких константах* $B_n>0$ *и* A_n *не может дать в пределе* (2) *собственную ф.р.*;

2-я группа. Для каждой последовательности н.с.в. этой группы найдутся константы $B_n>0$ и A_n такие, что в пределе (2) будет стоять собственная ф.р., а $\lim\limits_{n\to\infty} B_n<\infty$;

3-я группа. Для каждой последовательности н.с.в. этой группы найдутся константы $B_n>0$ и A_n такие, что в пределе будет стоять собственная ф.р. $G(x)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\infty$.

Ясно, что если в пределе (2) стоит собственная ф.р. $G(x)$, то последовательность $\{B_n\}$ не может слишком быстро возрастать. Получить же в пределе (2) несобственную ф.р. мы можем для каждой последовательности н.с.в. (1), заставив последовательность $\{B_n\}$ возрастать достаточно быстро.

В дальнейшем мы будем исследовать только последовательности н.с.в. из 3-й группы.

3. Пусть в пределе (2) для некоторых констант A_n и $B_n>0$ стоит собственная ф.р. $G(x)$. Если при этом выполняется условие c-пренебрегаемости $(0\leqslant c\leqslant 1)$, то (см. пункт 1) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n}=c.$$

В общем случае предел $\lim\limits_{n\to\infty} B_{n-1}/B_n$ может не существовать. Но мы всегда можем выделить подпоследовательность $\{n_k\}$ такую, что будет существовать предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_{n_k-1}}{B_{n_k}}=c,$$

где по теореме 3 $0\leqslant c\leqslant 1$. Фиксируем последовательности $B_n>0$ и A_n. Обозначим через C множество пределов $\lim\limits_{k\to\infty} B_{n_k-1}/B_{n_k}$, которые можем получить при разных подпоследовательностях $\{n_k\}$. Если возьмем другие константы $\tilde{B}_n>0$ и $\tilde{A}_n$, для которых в пределе (2) также стоит собственная ф.р. $\tilde{G}(x)$, то, используя теорему Б, получим, что множество всевозможных пределов $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{B}_{n_k-1}/\tilde{B}_{n_k}$, которые мы можем получить при разных подпоследовательностях $\{n_k\}$, тоже является C. Поэтому можно сформулировать следующее

Определение 2. Будем говорить, что последовательность н.с.в. (1) удовлетворяет условию C-пренебрегаемости, если можно найти такие константы $B_n>0$ и A_n, что в пределе (2) будет стоять собственная ф.р. $G(x)$, а множество пределов $\lim\limits_{k\to\infty} B_{n_k-1}/B_{n_k}$, которые мы можем получить при разных подпоследовательностях $\{n_k\}$, будет C.

Если множество C состоит из одного элемента c, то иногда мы будем употреблять термин $\{c\}$-пренебрегаемость, а иногда просто c-пренебрегаемость. Требование $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\infty$ в определении 2 необходимо лишь в случае $C=\{1\}$. Действительно, пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty} B_{n-1}/B_n<1$. Тогда найдется подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} B_{n_k-1}/B_{n_k}=c<1$. Если допустить, что $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=B<\infty$, то отсюда следовало бы, что $B/B=c<1$.

Определение 1′. Будем говорить, что ф.р. $G(x) \in L_C$, если можно найти последовательность н.с.в. (1), удовлетворяющую условию C-пренебрегаемости, для которой при некоторых константах $B_n > 0$ и A_n в пределе (2) будет стоять именно ф.р. $G(x)$.

Если множество C состоит из одного элемента c, то наряду с обозначением L_C мы будем использовать обозначения $L_{\{c\}}$ или L_c. Класс распределений L_c $(0 \leqslant c \leqslant 1)$ был уже введен выше. Понятно, что если ф.р. $G(x) \in L_c$, то и $G(ax+b) \in L_c$ $(a>0)$.

Пусть имеется последовательность н.с.в. (1), которая удовлетворяет условию C-пренебрегаемости. Пусть $B_n > 0$ и A_n константы, при которых в пределе (2) получаем некоторую собственную ф.р. $G(x)$. Пусть $c \in C$. Тогда найдется подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что будет выполняться соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_{n_k-1}}{B_{n_k}} = c. \tag{9}$$

При помощи равенства (4) получаем

$$G_{n_k}(x) = F_{n_k}(x) * G_{n_k-1}\left(\frac{B_{n_k}}{B_{n_k-1}}\, x\right). \tag{10}$$

Из теоремы о слабой компактности следует, что найдется подпоследовательность $\{k(l)\}$ такая, что $F_{n_{k(l)}}(x) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, где $F(x)$ ф.р. и

$$G(x) = F(x) * G\left(\frac{x}{c}\right)$$

$\left(\text{в случае } c=0 \;\; G\left(\frac{x}{c}\right) = E(x)\right)$. Значит, выполняется равенство (3) и, по определению М. Лоэва, ф.р. $G(x) \in L_c$. Поскольку для каждого c, $0 \leqslant c \leqslant 1$, справедливы включения $L_{\{1\}} \subset L_c \subset L_{\{0\}}$ [1], то мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Если* $C \neq \{1\}$ *и* $C \neq \{0\}$, *то*

$$L_C = \bigcap_{\substack{c\in C\\ c\neq 0,1}} L_c.$$

Как было показано, если в пределе (2) стоит ф.р. $G(x)$ и если для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$ выполняется соотношение (9), то можно найти подпоследовательность $\{k(l)\}$ такую, что $F_{n_{k(l)}}(x) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, где $F(x)$ ф.р., удовлетворяющая равенству (3).

Пусть теперь в пределе (2) стоит собственная ф.р. $G(x)$, и пусть для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$ $F_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, где ф.р. $F(x)$ при некотором c, $0<c<1$, удовлетворяет равенству (3). Покажем, что в этом случае выполняется соотношение (9). Допустим, что это не так. Тогда существует подпоследовательность $\{k(l)\}$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \frac{B_{n_{k(l)}-1}}{B_{n_{k(l)}}} = c',$$

где $c' \neq c$. Поскольку

$$G_{n_{k(l)}-1}\left(\frac{B_{n_{k(l)}}}{B_{n_{k(l)}-1}}x\right) \underset{l\to\infty}{\Rightarrow} G\left(\frac{x}{c'}\right),$$

то

$$G(x)=F(x) * G\left(\frac{x}{c'}\right).$$

Сравнивая с (3), получаем, что должно быть $c'=c$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть в пределе* (2) *стоит собственная ф.р.* $G(x)$. *Тогда для того, чтобы нашлась какая-нибудь последовательность* $\{n_k\}$, *для которой* $F_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, *где ф.р.* $F(x)$ *при некотором* c, $0<c<1$, *удовлетворяет равенству* (3), *необходимо и достаточно, чтобы нашлась последовательность* $\{n'_k\}$, *для которой*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{B_{n'_k-1}}{B_{n'_k}}=c.$$

Если ф.р. $G(x)\in L_c$ $(0<c<1)$, то какую подпоследовательность $\{n_k\}$ ни взять, слабым пределом для последовательности ф.р. $\{F_{n_k}(x)\}$ может быть только ф.р. $F(x)$, удовлетворяющая равенству (3).

Перепишем равенства (3) и (4) в терминах х.ф.:

$$g(t)=f(t)\,g(ct) \tag{11}$$

и

$$g_n(t)=f_n(t)\,g_{n-1}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}t\right). \tag{12}$$

Легко убедиться, что если $G_n(x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x)$ и для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$

$$\lim_{k-\infty}\frac{B_{n_k-1}}{B_{n_k}}=c,$$

то $f_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\to} f(t)$ во всех точках t, где $g(ct)\neq 0$. Пусть теперь в пределе (2) стоит собственная ф.р. $G(x)$ и пусть для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$ $f_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\to} f(t)$ во всех точках t, где $g(ct)\neq 0$ и х.р. $g(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют равенству (11). Покажем, что тогда $\lim\limits_{k\to\infty} B_{n_k-1}/B_{n_k}=c$. Предположим, что это не так. Тогда найдется подпоследовательность $\{k(l)\}$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty}\frac{B_{n_{k(l)}}-1}{B_{n_{k(l)}}}=c',$$

где $c'\neq c$. Но тогда получаем, что должно выполняться равенство

$$g(t)=f(t)\,g(c't),$$

а это возможно только в случае $c'=c$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть в пределе* (2) *стоит собственная ф.р.* $G(x)$ *с х. ф.* $g(t)$. *Тогда для того, чтобы для некоторой подпоследовательности* $\{n_k\} f_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\to} f(t)$ *во всех точках* t, *где* $g(ct)\neq 0$, *и х.ф.* $g(t)$ *и* $f(t)$ *удовлетворяют равенству* (11), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_{n_k-1}}{B_{n_k}} = c.$$

Заметим, что ф.р. $G(x)$ и $F(x)$ при некотором c, $0<c<1$, удовлетворяющие равенству (3), обе вместе являются или не являются собственными.

4. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 8. *Для того чтобы ф.р.* $G(x)\in L$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\beta\in\{k_0/(k_0+1),\ (k_0+1)/(k_0+2),\ \ldots;\ k_0$ *произвольное натуральное число*$\}$ $G(x)$ *была композицией* $G\left(\frac{x}{\beta}\right)$ *и некоторой другой ф.р.* $F_\beta(x)$.

Доказательство этой теоремы с небольшими изменениями повторяет рассуждения, использованные при доказательстве аналогичной теоремы ([3], стр. 156); там используется условие $\beta\in(0, 1)$. Непосредственно получаем следующее следствие.

Следствие 1. *Для того чтобы ф.р.* $G(x)\in L$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\beta\in(c, 1)$, *где* c, $0<c<1$, *фиксировано,* $G(x)$ *была композицией* $G\left(\frac{x}{\beta}\right)$ *и некоторой другой ф.р.* $F_\beta(x)$.

Теорему 8 мы можем усилить в следующем.

Теорема 8′. *Для того чтобы ф.р.* $G(x)\in L$, *необходимо и достаточно чтобы для любого* β *из некоторой последовательности* $\{\beta_n\}$, *где* $0<\beta_n<1$, $\prod_{n=1}^{\infty}\beta_n=0$ *и* $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$, $G(x)$ *была композицией* $G\left(\frac{x}{\beta}\right)$ *и некоторой другой ф.р.* $F_\beta(x)$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Как и при доказательстве вышеупомянутой теоремы, убеждаемся, что х.ф. $g(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы 8′, нигде не обращается в нуль. Х.ф. $g(t)$ при каждом $n=1, 2, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$g(t)=f_{c_k}(t)\,g(c_k t).$$

Поэтому мы можем сконструировать последовательность н.с.в.

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$$

с х.ф.

$$f_{c_1}\left(\frac{1}{c_1}t\right)=\frac{g\left(\frac{1}{c_1}t\right)}{g(t)},$$

$$f_{c_2}\left(\frac{1}{c_1c_2}t\right)=\frac{g\left(\frac{1}{c_1c_2}t\right)}{g\left(\frac{1}{c_1}t\right)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{c_n}\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}c_i}t\right)=\frac{g\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}c_i}t\right)}{g\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}c_i}t\right)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

соответственно. Х. ф. суммы

$$\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

равна

$$\prod_{k=1}^{n}f_{c_k}\left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}c_i}{\prod\limits_{i=1}^{k}c_i}t\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{g\left(t\prod\limits_{i=k+1}^{n}c_i\right)}{g\left(t\prod\limits_{i=k}^{n}c_i\right)}=$$

$$=\frac{g(t)}{g\left(t\prod\limits_{i=1}^{n}c_i\right)}\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}g(t).$$

Так как функция $g(t)$ непрерывна и нигде не обращается в нуль, то ясно, что равномерно по k $(1\leqslant k\leqslant n)$

$$f_{c_k}\left(t\prod_{i=k+1}^{n}c_i\right)\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}1.$$

Этим доказано, что х.ф. $g(t)\in L$.

Теорема доказана.

Используя теорему 5, можно сформулировать следующее следствие.

Следствие 2. *Для того чтобы $L_C=L$, достаточно любое из трех условий:*

а) *если* $\{k_0/(k_0+1),\ (k_0+1)/(k_0+2),\ \ldots,$ *где* k_0 *натуральное число*$\}\subset C$;

б) *если* $(c,\ 1)\subset C$, *где* $0<c<1$;

в) *если* $\left\{c_1,\ c_2,\ \ldots,\right.$ *где* $0<c_i<1,\ \prod\limits_{i=1}^{\infty}c_i=0,\ c_n\underset{n\to\infty}{\to}1\left.\right\}\subset C$.

Поскольку, как уже отметили, имеют место включения

$$L_{\{0\}} \supset L_{c^n} \supset L_c \supset L_{c^{\frac{1}{k}}} \supset L_{\{1\}},$$

где n, $k=1, 2, \dots$; $0<c<1$, то мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 9. *Если* $\{c_1, c_2, \dots,$ *где* $0<c_i<1$, $c_n \underset{n\to\infty}{\to} 1\} \subset C$, *то* $L_C = L$.

Доказательство. Если $\prod_{i=1}^{\infty} c_i = 0$, то утверждение доказано в следствии 2. Пусть $\prod_{i=1}^{\infty} c_i > 0$.

Берем последовательность чисел $\{c_1^{\frac{1}{i}}\}$. Данную последовательность $\{c_i\}$ заменяем другой последовательностью следующим образом:

$$c_i' \begin{cases} c_i, \text{ если } c_i \leqslant c^{\frac{1}{i}}, \\ c_i^{k_i}, \text{ если } c_i > c_1^{\frac{1}{i}} \end{cases}$$

(здесь k_i — минимальное число, обладающее свойством $c_i^{k_i} \leqslant c_1^{\frac{1}{i}}$). Одновременно исследуем и последовательность $\{c_i''\}$, где

$$c_i'' = \begin{cases} c_i, \text{ если } c_i' = c_i, \\ c_i^{k_i - 1}, \text{ если } c_i' = c_i^{k_i}, \quad \text{где } k_i > 1. \end{cases}$$

Ясно, что $c_i'' \geqslant c_1^{\frac{1}{i}}$, а $c_i' \leqslant c_1^{\frac{1}{i}}$.

Берем некоторую ф.р. $G(x) \in L_C$. Ввиду условий нашей теоремы, используя теорему 5, получаем, что $G(x) \in L_{c_i}$ $(i=1, 2, \dots)$. Поскольку для каждого $n=1, 2, \dots$ справедливо включение $L_{c^n} \supset L_c$, то получаем, что также $G(x) \in L_{c_i'}$ и $G(x) \in L_{c_i''}$ $(i=1, 2, \dots)$.

Поскольку $c_i' < c_1^{\frac{1}{i}}$, то

$$\prod_{i=1}^{\infty} c_i' = 0,$$

и поскольку $c_i'' \geqslant c_1^{\frac{1}{i}}$, то $c_i'' \underset{i\to\infty}{\to} 1$. Но, как легко видеть из определения последовательностей $\{c_i'\}$ и $\{c_i''\}$ $c_i''/c_i' \underset{i\to\infty}{\to} 1$. Таким образом, и $c_i' \underset{i\to\infty}{\to} 1$. При помощи следствия 2 получаем, что $G(x) \in L$.

Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии усилить теорему 8′ следующим образом.

Теорема 8″. *Для того чтобы ф.р.* $G(x) \in L$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* β *из некоторой последовательности* $\{\beta_n\}$, *где* $0<\beta_n<1$ *и* $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$, $G(x)$ *была композицией* $G\left(\frac{x}{\beta}\right)$ *и некоторой другой ф.р.* $F_\beta(x)$.

5. Пусть ф.р. $G(x)$ и $F(x)$ при некотором c, $0<c<1$, связаны равенством (3), эквивалентным равенству

$$G(x)=\prod_{i=0}^{\infty}{}^{*} F\left(\frac{x}{c^i}\right). \tag{13}$$

Видим, что если $F(x)\in L$, то и $G(x)\in L$. Из результатов М. Лоэва [1] следует, что классу распределений L_c $(0<c<1)$ принадлежат также безгранично делимые ф.р. не из класса L. В дальнейшем нам понадобится следующий пример такой безгранично делимой ф.р.

В терминах х.ф. равенство (13) запишется так:

$$g(t)=\prod_{i=0}^{\infty} f(c^i t), \tag{14}$$

где $g(t)$ и $f(t)$ х.ф., соответствующие ф.р. $G(x)$ и $F(x)$. Возьмем

$$f(t)=e^{(e^{it}-1)}.$$

Покажем, что функция

$$g(t)=\prod_{j=0}^{\infty} e^{(e^{ic^j t}-1)},$$

полученная при помощи формулы (14), будет х.ф. Логарифмируем:

$$\log g(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(e^{ic^j t}-1)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(e^{ic^j t}-1-\frac{ic^j t}{1+c^{2j}}\right)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{ic^j t}{1+c^{2j}}=$$

$$=i\gamma t+\int_{0}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u),$$

где функция $N(u)$ изменяется только в точках c_j и только на величину 1 и

$$N(u)=\begin{cases} 0, \text{ если } u\in[1,\ \infty), \\ -(j+1), \text{ если } u\in[c^{j+1} c^j). \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon>1$. Тогда

$$\int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN(u)=\sum_{j=0}^{\infty} c^{2j}=\frac{1}{1-c^2}.$$

Таким образом, действительно $g(t)$ будет х.ф. безгранично делимого закона. Поскольку функция $N(u)$ разрывна, то $g(t)\overline{\in} L$. Используя теорему 9 и тот факт, что существуют ф.р. из класса L_c $(0<c<1)$, которые не принадлежат классу L, получаем следующее следствие.

Следствие 3. *Пусть последовательность* $\{c_n\}$ *обладает свойствами:* $0<c_n<1$, $c_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. *Тогда среди классов распределения* L_{c_n} *имеется бесконечное множество несовпадающих классов.*

М. Лоэв [1] доказал, что если $\log c/\log c'$ рациональное число, то существует класс распределений $L_{c''}$ $(0<c''<1)$, такой, что $L_c \subset L_{c''}$ и $L_{c'} \subset L_{c''}$ $(0<c,\ c'<1)$. Но уже из следствия 3 получаем, что если $\log c/\log c'$ $(c \neq c',\ 0<c,\ c'<1)$ рациональное число, то имеются случаи, когда $L_c \neq L_{c'}$. Это замечание, а также теорема 10 показывает, что имеющееся в монографии М. Лоэва утверждение ([2], стр. 348), что в этом случае $L = L_{c'}$, является, по-видимому, ошибкой.

Теорема 10. *Если* $\log c/\log c'$ $(c \neq c',\ 0<c,\ c'<1)$ *рациональное число, то* $L_c \neq L_{c'}$.

Доказательство. Пусть $\log c/\log c' = m/n$ и

$$g(t) = \prod_{j=0}^{\infty} e^{(e^{ic^j t}-1)} = g(ct)\, e^{(e^{it}-1)},$$

т.е. х.ф. $g(t) \in L_c$. Покажем сначала, что $g(t) \bar{\in} L_{c^{\frac{1}{2}}}$. Допустим противное. Тогда существует х.ф. $f_{c^{\frac{1}{2}}}(t)$, удовлетворяющая равенству

$$g(t) = f_{c^{\frac{1}{2}}}(t)\, g(c^{\frac{1}{2}} t),$$

что эквивалентно равенству

$$g(t) = f_{c^{\frac{1}{2}}}(t)\, f_{c^{\frac{1}{2}}}(c^{\frac{1}{2}} t)\, g(ct).$$

М. Лоэв [1] доказал, что ф. р. $G(x)$ и $F(x)$ при помощи равенства (3) определяются взаимно однозначно. Это значит, что должно выполняться равенство

$$e^{(e^{it}-1)} = f_{c^{\frac{1}{2}}}(t)\, f_{c^{\frac{1}{2}}}(c^{\frac{1}{2}} t). \tag{15}$$

Как компонента пуассонова закона, $f_{c^{\frac{1}{2}}}(t)$ должна тоже быть х.ф. пуассонова закона. Но в таком случае не выполняется равенство (15). Это означает, что $g(t) \bar{\in} L_{c^{\frac{1}{2}}}$.

Аналогично доказываем, что $g(t) \bar{\in} L_{c^{\frac{1}{k}}}$ $(k=2,\ 3,\ \ldots)$. Для окончания доказательства нам понадобится следующая теорема Д. А. Райкова.

Теорема В [4]. *Пусть х.ф.* $g(t)$ *имеет вид*

$$g(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (e^{i\tau_j t} - 1)\right\},$$

где $0<\tau_1< \ldots <\tau_k$ *— набор произвольных положительных чисел,* $\lambda_j > 0$. *Пусть* $\Lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ *— совокупность всех чисел вида*

$$l_1\tau_1 + l_2\tau_2 + \ldots + l_k\tau_k,$$

где $l_1+l_2+\ldots+l_k>0$, $l_j\geqslant 0$ *— целые числа. Числа совокупности* $\Lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ *разложим в возрастающую последовательность (не учитывая возможных повторений)*

$$\Lambda_1=\tau_1<\Lambda_2<\ \ldots\ <\Lambda_n<\ \ldots\ .$$

Тогда все компоненты нашей х.ф. имеют вид

$$f_1(t)=\exp\left\{i\beta t+\sum_{\Lambda_n\leqslant\tau_k}\alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t}-1)\right\},$$

где $\alpha_{\Lambda_n}\geqslant 0$, *если* $\tau_1\leqslant\Lambda_n\leqslant 2\tau_1$, *в остальном* α_{Λ_n} *произвольные числа.*

Продолжим доказательство теоремы 10. Покажем, что наша х.ф. $g(t)\overline{\in} L_{c^{\frac{2}{3}}}$. Допустим, что, наоборот, $g(t)\in L_{c^{\frac{2}{3}}}$. Это значит, что должна найтись х.ф. $f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)$, удовлетворяющая равенству

$$g(t)=f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)\,g(c^{\frac{2}{3}}t),$$

которая эквивалентна равенству

$$g(t)=f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)\,f_{c^{\frac{2}{3}}}(c^{\frac{2}{3}}t)\,f_{c^{\frac{2}{3}}}(c^{\frac{4}{3}}t)\,g(c^2t).$$

Поскольку

$$g(t)=e^{(e^{it}-1)}\,e^{(e^{ict}-1)}\,g(c^2t),$$

то должно выполняться равенство

$$e^{(e^{it}-1)+(e^{ict}-1)}=f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)\,f_{c^{\frac{2}{3}}}(c^{\frac{2}{3}}t)\,f_{c^{\frac{2}{3}}}(c^{\frac{4}{3}}t). \tag{16}$$

По теореме В х.ф. $f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)$ должна иметь вид:

$$f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)=\exp\left\{i\beta t+\sum_{1\leqslant n<\frac{1}{c}}\alpha_n(e^{icnt}-1)+\alpha(e^{it}-1)\right\},$$

где $\alpha_1, \alpha_2\geqslant 0$, а остальные α_i — произвольные числа. Получаем, что тогда будет

$$f_{c^{\frac{2}{3}}}(c^{\frac{4}{3}}t)=\exp\left\{i\beta c^{\frac{4}{3}}t+\sum_{1\leqslant n<\frac{1}{c}}\alpha_n(e^{icnc^{\frac{4}{3}}t}-1)+\alpha(e^{ic^{\frac{4}{3}}t}-1)\right\}.$$

По теореме В получаем, что должно быть

$$c\leqslant c_n c^{\frac{4}{3}}\leqslant 1,$$

$$c\leqslant c^{\frac{4}{3}}\leqslant 1.$$

Это означает, что $\alpha=0$, а также, что должно быть $n\geqslant 1/c^{\frac{4}{3}}$. Поскольку $1/c^{\frac{4}{3}} > > 1/c$, то оказывается, что сумма должна быть пустой. Это означает, что

$$|f_{c^{\frac{2}{3}}}(t)|\equiv 1,$$

но тогда не будет выполняться равенство (16). Полученное противоречие доказывает, что $L_c\neq L_{c^{\frac{2}{3}}}$. Соотношение $L_c\neq L_{c^{\frac{m}{n}}}$, где $m/n<1$ и m, n — натуральные числа, доказывается аналогично.

Пусть теперь $m/n>1$. Обозначим $c^{\frac{m}{n}}=c'$. Выше уже было доказано, что $L_{c'}\neq L_{c'^{\frac{m}{n}}}$. Это означает, что $L_c\neq L_{c^{\frac{m}{n}}}$ и в этом случае.

Теорема доказана.

Частным случаем следствия 3 является следствие 4.

Следствие 4. *Для каждого класса L_c $(0<c<1)$ всегда найдется бесконечное множество классов $L_{c'}$ $(c<c'<1)$ таких, что $L_c\neq L_{c'}$ и $\log c/\log c'$ — иррациональное число.*

Вопрос, всегда ли $L_c\neq L_{c'}$, если $c\neq c'$, остается открытым.

Теорема 11. *Если $c'=c^{\alpha}$, где $\alpha>1$ рациональное число, но $\alpha\neq 2, 3, \ldots,$ то включение $L_{c^{\alpha}}\supset L_c$ не имеет место.*

Доказательство. Если $n=1, 2, \ldots$, то, как показал М. Лоэв, $L_{c^n}\supset L_c$. Покажем, что включение $L_{c^{\alpha}}\supset L_c$ не имеет места, если $\alpha>1$ рациональное число и $\alpha\neq 1, 2, \ldots$. Пусть

$$g(t)=\prod_{j=0}^{\infty} e^{(e^{ic^j t}-1)}.$$

Как мы знаем, х.ф. $g(t)\in L_c$. Допустим, что также $g(t)\in L_{c^{\frac{m}{n}}}$, где m не делится на n, $m>n>1$, и m, n—натуральные числа. Тогда должна найтись х.ф. $f_{c^{\frac{m}{n}}}(t)$ такая, что будет справедливо равенство

$$g(t)=f_{c^{\frac{m}{n}}}(t)g(c^{\frac{m}{n}}t),$$

что эквивалентно равенству

$$g(t)=\left[\prod_{i=0}^{n-1} f_{c^{\frac{m}{n}}}(c^{\frac{mi}{n}}t)\right]g(c^m t).$$

Поскольку также

$$g(t)=\left[\prod_{j=0}^{m-1} e^{(e^{ic^j t}-1)}\right]g(c^m t),$$

то должно выполняться равенство

$$\prod_{j=0}^{m-1} e^{(e^{ic^j t}-1)}=\prod_{i=0}^{n-1} f_{c^{\frac{m}{n}}}(c^{\frac{mi}{n}}t). \tag{17}$$

Используя теорему В, получаем, что х.ф. $f_{\frac{m}{c^n}}(t)$ должна иметь вид:

$$f_{\frac{m}{c^n}}(t)=\exp\Big\{i\beta t+\sum_{\substack{j_1 j_2,\ \dots,\ j_{m-1}\geqslant 0\\ j_1+j_2+\ \dots\ +j_{m-1}\geqslant 1\\ c^{m-1}j_1+c^{m-2}j_2+\ \dots\ +cj_{m-1}<1}}\alpha_{j_1,j_2,\ \dots,j_{m-1}}\times$$

$$\times\left(e^{i(c^{m-1}j_1+c^{m-2}j_2+\ \dots\ +cj_{m-1})t}-1\right)+\alpha\left(e^{it}-1\right)\Big\}.$$

Поскольку

$$f_{\frac{m}{c^n}}\left(c^{\frac{m(n-1)}{n}}t\right)=\exp\Big\{i\beta c^{\frac{m(n-1)}{n}}t+$$

$$+\sum_{\substack{j_1 j_2,\ \dots,\ j_{m-1}\geqslant 0\\ j_1+j_2+\ \dots\ +j_{m-1}\geqslant 1\\ c^{m-1}j_1+c^{m-2}j_2+\ \dots\ +cj_{m-1}<1}}\alpha_{j_1,j_2,\ \dots,j_{m-1}}\times$$

$$\times\left(e^{i(c^{m-1}j_1+c^{m-2}j_2+\ \dots\ +cj_{m-1})c^{\frac{m(n-1)}{n}}t}-1\right)+\alpha\left(e^{ic^{\frac{m(n-1)}{n}}t}-1\right)\Big\},$$

то по теореме В должно выполняться неравенство

$$c^{m-1}j_1+c^{m-2}j_2+\ \dots\ +cj_{m-1}\geqslant c^{\frac{m}{n}-1}.$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Поскольку в левой стороне равенства (17) члена с коэффициентом $c^{\frac{m(n-1)}{n}}$ в экспоненте нет, то еще хотя бы один такой член должен найтись в правой стороне. Но это означает, что должно выполняться неравенство

$$c^{\frac{m(n-1)}{n}}\geqslant c^{\frac{m}{n}-1},$$

откуда получаем, что должно быть $n\leqslant 2m/(m+1)<2$. Полученное противоречие показывает, что должно быть $\alpha=0$.

В левой стороне равенства (17) имеется член с коэффициентом 1 в экспоненте. В правой стороне член с таким коэффициентом единственный – это $\exp\{\alpha(e^{it}-1)\}$. Значит, должно быть $\alpha=1$. Получаем противоречие.

Теорема доказана.

Отметим, что в случае $m=nk$, где $k=2, 3, \dots$, $\frac{m(n-1)}{n}=k(n-1)$, и член с коэффициентом $c^{\frac{m(n-1)}{n}}$ в экспоненте нашелся бы и в левой стороне. В этом случае не следовало бы, что $\alpha=0$, и никакого противоречия не получилось.

6. Определение 3. Мы будем говорить, что ф.р. $F(x)\in D_c$ $(0<c<1)$, если найдется ф.р. $G(x)$, удовлетворяющая равенству (3).

Пусть ф.р. $F(x)\in D_c$. Тогда, как легко видеть,

$$\mathop{\boxed{*}}_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{x}{c^i}\right)\in D_{c^n}\qquad (n=1,\ 2,\ \dots).$$

Но мы всегда можем найти ф.р. $\bar{F}(x)\in D_{c^n}$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$, которая в виде

$$\bar{F}(x)=\mathop{\boxed{*}}_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{x}{c^i}\right),$$

где $F(x)$ ф.р., не разлагается. Если такое разложение имеет место, то $F(x)\in D_c$.

Пусть ф.р.

$$F^{(n)}(x)\in D_{c^n}\left(0<c<1,\ n\in\{2,\ 3,\ \ldots\}\right).$$

Тогда найдется ф.р. $G^{(n)}(x)$, удовлетворяющая равенству

$$G^{(n)}(x)=F^{(n)}(x) * G^{(n)}\left(\frac{x}{c^n}\right)=\mathop{\boxed{*}}_{i=0}^{\infty} F^{(n)}\left(\frac{x}{c^{ni}}\right).$$

Берем следующую композицию

$$G(x)=\mathop{\boxed{*}}_{i=0}^{\infty} F^{(n)}\left(\frac{x}{c^i}\right)=\mathop{\boxed{*}}_{j=0}^{n-1}\mathop{\boxed{*}}_{i=0}^{\infty} F^{(n)}\left(\frac{x}{c^{j+ni}}\right)=\mathop{\boxed{*}}_{j=0}^{n-1} G^{(n)}\left(\frac{x}{c^j}\right).$$

Это значит, что $G(x)$ является ф.р. и $G(x)\in L_c$. Тем самым $F(x)\in D_c$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 12. *Имеют место включения*

$$D_{c^{\frac{1}{k}}}\supset D_c\supset D_{c^n},$$

где $k,\ n=1,\ 2,\ \ldots;\ 0<c<1$.

Как мы знаем, $L\subset L_c$ $(0<c<1)$; в отношении же класса D_c справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Сущесвуют ф.р.* $F(x)\in L$, *которые не принадлежат ни одному классу* D_c $(0<c<1)$.

Доказательство. Пусть х.ф. $f(t)$ соответствует ф.р. $F(x)$ и пусть ее логарифм имеет вид

$$\log f(t)=\int_0^\infty \{e^{itu}-1-itu/(1+u^2)\}\,dN(u),$$

где для каждого $\varepsilon>0$

$$I(\varepsilon)=\int_0^\varepsilon u^2 dN(u)<\infty$$

и $I(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$. Пусть функция $N(u)$ непрерывна, в интервале

$$\left[\frac{c^2(k+1)^2}{c^{2k}},\quad \frac{c^2(k+2)^2}{c^{2(k+1)}}\right)$$

возрастает на величину $1/k^2$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ и $N(2)=-(16/15)^2$. Поскольку при $k\to\infty$ монотонно

$$\frac{c^2(k+2)^2}{k^2c^{2(k+1)}}\Bigg/\left[\frac{c^2(k+2)^2}{c^{2(k+1)}}-\frac{c^2(k+1)^2}{c^{2k}}\right]\to 0,$$

то также можно потребовать, чтобы функция $uN'(u)$, где $N'(u)$ означает любую из производных, левую или правую, которые в разных точках могут быть различными, не возрастала. Ясно, что такую, х.ф. $f(t)$, которая удовлетворяла бы всем перечисленными требованиям, можно найти. Такая х.ф. $f(t) \in L$ ([3], стр. 159).

При помощи равенства

$$g(t) = \prod_{j=0}^{\infty} f(c^j t)$$

определим функцию $g(t)$. Если $g(t)$ является х.ф., то ясно, что $g(t) \in L$. Это значит, что ее логарифмы мы можем записать в виде

$$\log g(t) = i\gamma t + \int_0^{\infty} \{e^{itu} - 1 - itu/(1+u^2)\} dN_1(u),$$

где

$$N_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} N(c^i u).$$

Оценим

$$\int_0^{\varepsilon} u^2 dN_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\frac{2}{c^i}} c^{2i} u^2 d\,N(u) \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} \frac{c^2 (k+1)^2}{c^{2k}} c^{2i} \frac{1}{k^2} = \infty.$$

Это значит, что $g(t)$ не может быть х.ф. безгранично делимого закона и, тем самым, $g(t) \in L$. Полученное противоречие доказывает, что $g(t)$ не может быть х.ф.

Теорема доказана.

В пункте 5 мы доказали, что х.ф. $f(t) = \exp\{e^{it} - 1\}$ принадлежит всем классам D_c $(0 < c < 1)$. Поскольку $f(t) \overline{\in} L$, то можно сформулировать следующее следствие.

Следствие 5. *Классу распределений* D_c $(0 < c < 1)$ *также принадлежат распределения не из класса* L.

7. М. Лоэв [1] доказал, что если собственная ф.р. $G(x) \in L_c$ $(0 < c < 1)$, то обязательно ее х.ф. $g(t)$ удовлетворяет неравенству $|g(t)| < 1$, если $t \neq 0$. Таким образом, используя теорему 5, мы можем сформулировать следующее следствие.

Следствие 6. *Решетчатые распределения не принадлежат классам* L_C, *если* $C \neq \{0\}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 14. *Если х.ф.* $g(t) \in L_c$ $(0 < c < 1)$, *то*

$$\overline{\lim_{t \to \pm\infty}} |g(t)| < 1.$$

Если

$$\overline{\lim_{t\to\pm\infty}}\ |g(t)|>0,$$

то

$$\overline{\lim_{t\to\pm\infty}}\ |f(t)|=1$$

где х.ф. $g(t)$ *и* $f(t)$ *при* $0<c<1$ *связаны равенством* (11).

Доказательство. Берем последовательность интервалов

$$A_i=\left[\frac{t'}{c^{i-1}},\ \frac{t'}{c^i}\right] \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $t'>0$. Пусть

$$a_i=\max_{t\in A_i}|g(t)|=|g(t_i)|,$$

где $t_i\in A_i$ ($i=0$, 1, 2, ...). Ввиду равенства (11), пишем

$$g(t_i)=f(t_i)g(ct_i) \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

тк уда получаем неравенства

$$|g(t_i)|\leqslant|g(ct_i)|\leqslant|g(t_{i-1})|.$$

Поскольку решетчатые распределения классу L_c не принадлежат,то

$$1>a_0\geqslant a_1\geqslant\ \ldots$$

и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ |g(t)|<1.$$

Докажем вторую часть теоремы. При помощи равенства (11) получаем соотношение

$$\lim_{i\to\infty}|g(t_i)|=\lim_{i\to\infty}|f(t_i)|\lim_{i\to\infty}|g(ct_i)|,$$

где t_i определяются, как и при доказательстве первой части теоремы. Поскольку

$$\lim_{i\to\infty}|g(t_{i-1})|\geqslant\lim_{i\to\infty}|\ g(ct_i)|\geqslant\lim_{i\to\infty}|g(t_i)|>0,$$

то обязательно должно быть

$$\lim_{i\to\infty}|f(t_i)|=1$$

и тем более

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ |f(t)|=1.$$

Теорема доказана.

Следствие 7. *Если х.ф.* $g(t)\in L_C$, *где* $C\neq\{0\}$, *то*

$$\lim_{t\to\pm\infty}|g(t)|<1.$$

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.I.1972

Литература

1. M. Loeve, Nouvelles clases de lois limites, Bulletin de la Societe Mathematique de France, 73, 1–2(1945), 107–126.
2. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., ИЛ., 1962.
3. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.
4. Д. А. Райков, О разложении законов Гаусса и Пуассона, Изв. АН СССР, серия матем., 2 (1938), 91–124.

APIE KAI KURIAS RIBINIŲ PASISKIRSTYMŲ KLASES

F. Mišeikis

(*Reziumė*)

Jeigu dvi pasiskirstymo funkcijos $G(x)$ ir $F(x)$ tenkina (3) lygybę, kur $0<c<1$, tai sakome, jog $G(x)\in L_c$. Straipsnyje nagrinėjamos klasės L_c savybės. Pavyzdžiui, įrodoma, kad $L_c \neq L_c'$, jeigu $\log c/\log c'$, yra racionalinis skaičius, nelygus 1.

ON CERTAIN CLASSES OF LIMIT DISTRIBUTIONS

F. Mišeikis

(*Summary*)

Let the distribution functions $G(x)$ and $F(x)$ satisfy the equation (3). Then we shall say that $G(x)\in L_c$ $(0<C<1)$. In the present paper the properties of the class of distributions L_c are investigated. For example, it is proved, that $L_c=L_{c'}$ if $\log c/\log c'$ is rational and not equal to 1.