XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 517.522.2

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ

А. Г. Нафталевич

1. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ – произвольная последовательность натуральных чисел. Число

$$l = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, l_k, \quad l_k = n_{k+1} - n_k, \tag{1}$$

назовем разреженностью последовательности $\{n_k\}$ и число

$$\alpha = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{l_k}{n_k} - \tag{2}$$

относительной разреженностью той же последовательности $\{n_k\}$.

Теорема 1. *Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ имеет конечную разреженность l $(l<\infty)$ и $S_n(z)$ означает n-ю частичную сумму степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

Если подпоследовательность частичных сумм $\{S_{n_k}(z)\}$, $k=1, 2, 3, \ldots$, ряда (3) *сходится в l различных точках z_i, $i=1, 2, \ldots, l$, то ряд* (3) *сходится в круге $|z|<m$, где $m=\min|z_i|$, $i=1, 2, \ldots, l$.*

В случае $l=1$ эта теорема сводится к известной теореме Абеля о степенных рядах.

Теорема 1 – точная: число точек z_i, в которых предполагается сходимость последовательности $\{S_{nk}(z)\}$, нельзя уменьшить и нельзя также утверждать сходимость ряда (3) в круге, радиус которого больше m.

Доказательство этой теоремы приведем несколько ниже. Прежде сформулируем еще две теоремы о сходимости ряда (3).

Теорема 2. *Пусть $S_n(z)$ – n-я частичная сумма ряда* (3), *$\{n_k\}$ – последовательность натуральных чисел, относительная разреженность которой равна нулю $(\alpha=0)$, и F – замкнутое ограниченное множество точек z-плоскости, имеющее положительную емкость. Если последовательность $\{S_{n_k}(z)\}$, $k=1, 2, 3, \ldots$, равномерно сходится на множестве F, то ряд* (3) *сходится в круге $|z|<m$, где $m=\min|z|$, $z\in F$.*

Условие $\alpha=0$ является существенным, однако теорема 2, как будет видно, может быть уточнена.

Рассмотрим функцию

$$V = V(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i - z_j|, \tag{4}$$

где z_i, $i=0, 1, \ldots, n$ — произвольная система точек замкнутого и ограниченного множества F. Наибольшее значение этой функции (при фиксированном n) обозначим через V_n:

$$V_n = \max_{z_i \in F} V(z_0, z_1, \ldots, z_n), \tag{5}$$

а числа

$$\alpha_n = \frac{V_{n+1}}{V_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

назовем числами Фекете множества F. Заметим, что последовательность $\sqrt[n]{\alpha_n}$ имеет, как показал Фекете, конечный предел, и этот предел равен емкости множества F [1].

Теорема 3. *Пусть $S_n(z)$ и n_k — такие же, как в теореме 2, а F — замкнутое ограниченное множество, числа Фекете α_n которого удовлетворяют условию*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\alpha_{l_k}} = 1, \tag{7}$$

где $l_k = n_{k+1} - n_k$. Если последовательность $S_{n_k}(z)$ сходится равномерно на множестве F, то ряд (3) сходится в круге $|z| < m$, $m = \min |z|$, $z \in F$.

Условие (7) является существенным: если это условие отбросить, то теорема 3 перестает быть верной.

2. **Лемма 1.** *Пусть*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n -$$

многочлен, степень которого не больше n, и z_i, $i=0, 1, \ldots, n$ — различные точки комплексной плоскости. Если

$$|P(z_i)| \leqslant M, \quad M \geqslant 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

то коэффициенты a_k многочлена $P(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_k| \leqslant A \cdot M,$$

где A — постоянная, зависящая только от точек z_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, (в частности, A не зависит от M).

Доказательство. Обозначим

$$P(z_k) = c_k, \quad |c_k| \leqslant M, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Тогда коэффициенты a_k можно определить из системы линейных уравнений

$$a_0 + a_1 z_k + a_2 z_k^2 + \ldots + a_n z_k^n = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Если детерминант этой системы обозначим через V, а его миноры через V_{ij}, то

$$a_k = \frac{c_0 V_{k0} + c_1 V_{k1} + \ldots + c_n V_{kn}}{V}.$$

Учитывая (8), получаем $|a_k| \leqslant AM$, где

$$A = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{|V_{k0}| + |V_{k1}| + \ldots + |V_{kn}|}{|V|}.$$

Очевидно, что V, V_{ij}, а вместе с ними и A, зависят только от z_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим ряд (3) и его частичные суммы

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

при $n = n_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Из (1) следует, что при достаточно большом k, $k > k_0$, выполнено неравенство $l_k = n_{k+1} - n_k \leqslant l$. Поэтому

$$S_{n_{k+1}}(z) - S_{n_k}(z) = z^{n_k+1} P_k(z) \equiv z^{n_k+1} \sum_{s=1}^{l_k} a_{n_k+s} z^{s-1}, \tag{9}$$

где $P_k(z)$ — многочлен, степень которого не больше $l-1$. Из сходимости последовательности $S_{n_k}(z)$ в точках z_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, следует, что при $k > k_0$ в этих точках

$$|z^{n_k+1} P_k(z)| < 1.$$

Таким образом, при $z = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, выполнено неравенство

$$|P_k(z)| < \frac{1}{m^{n_k+1}}. \tag{10}$$

По лемме 1, коэффициенты a_s, $s = n_k + i$, $i = 1, 2, \ldots, l_k$, многочлена $P_k(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_s| \leqslant \frac{A}{m^{n_k+1}} \leqslant \frac{AB}{m^s}, \quad s > s_0,$$

где A не зависит от s и $B = \max(m^l, 1)$. Отсюда легко следует, что ряд (3) сходится в круге $|z| < m$.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 мы использовали только ограниченность последовательности $S_{n_k}(z)$ в точках z_i, $i = 1, 2, \ldots, l$.

4. Чтобы доказать точность теоремы 1, предположим, что $m = |z_1| \leqslant \leqslant |z_2| \leqslant \ldots \leqslant |z_l|$, и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z), \tag{11}$$

где

$$Q_k(z) = b_k z^{lk} (z - z_2)(z - z_3) \ldots (z - z_l) \equiv \sum_{s=lk}^{l(k+1)-1} c_s z^s,$$

а b_k и c_k — некоторые комплексные числа. Два многочлена $Q_i(z)$ и $Q_j(z)$ (указанного выше вида) не содержат подобных членов, если $i \neq j$. Поэтому частичная сумма $S_n(z)$ степенного ряда

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s \tag{12}$$

(полученного из ряда (11) раскрытием скобок в многочленах $Q_k(z)$) имеет при $n=l(k+1)-1$ вид

$$S_n(z)=\sum_{i=0}^{k} Q_i(z),$$

и указанная последовательность $S_n(z)$ сходится в тех же точках, что и ряд (11). В частности, последовательность частичных сумм $S_n(z)$, $n=l(k+1)-1$ сходится в точках z_i, $i=2, 3, \ldots, l$. Кроме того, разреженность последовательности индексов этих частичных сумм равна l. Заметим еще, что в точках $z\neq z_i$, $i=2, 3, \ldots, l$, ряд (11), (12) и

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{lk}$$

сходятся или расходятся одновременно. Следовательно, для любого числа $r\geqslant 0$, и в частности для числа $r=m$, числа b_k можно так зафиксировать, чтобы ряд (12) сходился в круге $|z|\leqslant r$ и расходился вне этого круга.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть F' — дополнение к множеству F, O — связная компонента открытого множества F', содержащая точку $z=\infty$, и $G(z)$ — функция Грина для области O с полюсом в точке $z=\infty$. Функция Грина $G(z)$ существует, так как емкость множества F положительна.

Обозначим через $K(R)$, область, ограниченную линией уровня функции Грина $G(z)=\ln R$, $R>1$, и рассмотрим многочлен $P_k(z)$ (см. (9)). Из равномерной сходимости последовательности $S_{n_k}(z)$ на множестве F следует, что на этом множестве будет выполнено неравенство (10), если $k>k_0$ — достаточно большое число. Воспользуемся этим неравенством и применим к многочлену $P_k(z)$ лемму Уолша [2] (стр. 101), которая гласит:

Пусть $Q(z)$ — многочлен степени n. Если $|Q(z)|\leqslant M$ при $z\in F$, то

$$|Q(z)|\leqslant MR^n \quad \text{при} \quad z\in K(R).$$

Получим

$$|P_k(z)|\leqslant \frac{R^{l_k-1}}{m^{n_k+1}} \quad \text{при} \quad z\in K(R). \tag{13}$$

Число R зафиксируем настолько большим, чтобы круг $|z|\leqslant m$ лежал внутри области $K(R)$. Тогда неравенство (13) будет, в частности, выполнено в круге $|z|\leqslant m$ и коэффициенты a_s многочлена $P_k(z)$ станут в силу неравенств Коши удовлетворять условию

$$|a_s|\leqslant \frac{R^{l_k-1}}{m^s}, \quad n_k+1\leqslant s\leqslant n_{k+1}, \quad k>k_0. \tag{14}$$

Так как относительная разреженность последовательности n_k равна по условию теоремы нулю, то при $s>n_k$ будет

$$\lim_{k\to\infty}\frac{l_k}{s}=\lim_{k\to\infty}\frac{l_k}{n_k}=0,$$

и из (14) следует

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|a_s|} \leqslant \frac{1}{m}. \qquad (15)$$

Таким образом, ряд (3) сходится в круге $|z|<m$.

6. Чтобы выяснить значение условия $\alpha=0$, означающего, что относительная разреженность последовательности n_k равна нулю, опять рассмотрим ряды (11) и (12), полагая теперь

$$Q_k(z)=[z^l(2-z)]^{m_k}\equiv \sum_{s=lm_k}^{(l+1)\,m_k} c_s z^s, \qquad (16)$$

где l — произвольно зафиксированное натуральное число и $\{m_k\}$ — достаточно редкая последовательность натуральных чисел. При этом последовательность m_k выбираем настолько редкой, чтобы два различных многочлена $Q_i(z)$ и $Q_j(z)$ вида (16) не содержали подобных членов. Тогда последовательность частичных сумм $S_n(z)$ ряда (12) сходится при $(l+1)\,m_k\leqslant n<l\cdot m_{k+1}$ в тех же точках, что и ряд (11). Заметим, что относительная разреженность последовательности индексов указанных частичных сумм $S_n(z)$ равна $1/l$, и обозначим через F дугу $|\arg z|\leqslant\delta$, $|z|=2$, где число $\delta>0$ выбрано настолько малым, чтобы

$$|z^l(2-z)|\leqslant q<1 \quad \text{при} \quad z\in F.$$

Число m, соответствующее этому множеству F, очевидно, равно 2 и ряд (11) вместе с указанной выше последовательностью $S_n(z)$ сходится равномерно на множестве F. С другой стороны, ряд (12) не может сходиться вне круга $|z|<1$, так как все коэффициенты этого ряда — целые числа.

7. Доказательство теоремы 3. Как и в доказательстве теоремы 2, разность $S_{n_{k+1}}(z)-S_{n_k}(z)$ представим в виде (9). Получаемый при этом многочлен $P_k(z)$ удовлетворяет на множестве F неравенству (10). Для оценки многочлена $P_k(z)$ вне множества F воспользуемся следующей, доказанной в нашей работе [3] (см. там леммы 1 и 2), леммой:

Пусть F — замкнутое ограниченное множество, α_n — числа Фекете этого множества и $a=\max|z|$ при $z\in F$. Если многочлен $Q(z)$, степень которого не больше n, ограничен на множестве F числом M, то в любой точке $z\bar{\in} F$, $|z|=r$,

$$|Q(z)|\leqslant \frac{(n+1)\,M\,(r+a)^{n+1}}{\alpha_{n-1}\,d(z)},$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до множества F.

Зафиксируем число $R_1\geqslant m$ настолько большим, чтобы расстояние d множества F до окружности $|z|=R_1$ удовлетворяло неравенству $d\geqslant 1$, и обозначим $R=\max\,(R_1+a,\,1)$. Заметим, что степень многочлена $P_k(z)$ не больше l_k-1, и применим к нему сформулированную выше лемму при $n=l_k+1$. Учитывая (10), получим, что на окружности $|z|=R_1$

$$|P_k(z)|\leqslant \frac{(l_k+2)\,R^{l_k+2}}{m^{n_k+1}\,\alpha_{l_k}}.$$

Отсюда и из условия (7) легко получаем (ср. соответствующее место в доказательстве теоремы 2), что коэффициенты a_s ряда (3) удовлетворяют соотношению (15), и, значит, ряд (3) сходится в круге $|z|<m$.

Замечание 2. Как в теореме 2, так и в теореме 3, условие равномерной сходимости последовательности $S_{n_k}(z)$ на множестве F можно, как это видно из доказательства, заменить условием равномерной ограниченности этой последовательности на F.

8. Покажем, что условие (7) является существенным для справедливости теоремы 3. Если условие (7) не выполнено, то, как будет показано, множество F имеет нулевую емкость (теорема 2 является таким образом частным случаем теоремы 3) и

$$0 \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \beta_k = q < 1, \quad \beta_k = \sqrt[n_k]{\alpha_{l_k}}. \tag{17}$$

Общий член последовательности $\{\beta_k\}$ запишем в виде

$$\beta_k = \gamma_k^{\frac{l_k}{n_k}}, \quad \gamma_k = \sqrt[l_k]{\alpha_{l_k}}, \tag{18}$$

и предположим сначала, что емкость множества F положительна и равна $c>0$. Если $l_k\to\infty$, то $\gamma_k\to c$ (см. [1]) и поэтому последовательность γ_k ограничена как сверху, так и снизу положительными числами. Из (2) и (18) легко следует, что $\beta_k\to 1$, если $c>0$.

Если же емкость множества F равна нулю и $l_k\to\infty$, то $\gamma_k\to 0$. Таким образом, последовательность $\{\gamma_k\}$ ограничена, откуда легко следует, что $\overline{\lim}\ \beta_k \leqslant 1$. Значит, если (7) не выполнено, то имеет место (17).

Вернемся к функции V, определенной в (4). Систему точек $z_{kn}=\zeta_k \in F$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, для которой функция V принимает наибольшее на множестве F значение V_n, назовем системой точек Фекете n-го порядка, а многочлен

$$\Phi_{n+1}(z) = \prod_{k=0}^{n} (z-\zeta_k) -$$

многочленом Фекете $n+1$-й степени. Заметим, что (см. [3])

$$\max_{z\in F} |\Phi_{n+1}(z)| \leqslant \alpha_n. \tag{19}$$

В следующем пункте будет показано, что существует замкнутое ограниченное множество F и две последовательности натуральных чисел m_k и h_k, имеющие следующие свойства:

1) множество F лежит на окружности $|z|=m$;

2) $m_k+h_k+2<m_{k+1}$, $h_k/m_k\to 0$; (20)

3) числа Фекете α_n множества F удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[m_k]{\alpha_{h_k}} = q, \quad 0\leqslant q<1. \tag{21}$$

Рассмотрим ряды (11) и (12), полагая теперь, что

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{(q_1 m)^{m_k}} z^{m_k+1} \Phi_{h_k+1}(z), \quad q<q_1<1, \tag{22}$$

где $\Phi_n(z)$ — многочлены Фекете вышеуказанного множества F. Заметим, что два многочлена $Q_i(z)$ и $Q_j(z)$ вида (22) не содержат в силу первого из условий (20) подобных членов, и рассмотрим последовательность частичных сумм $S_n(z)$ ряда (12), индексы n которых удовлетворяют неравенствам $m_k+h_k+2\leqslant n\leqslant m_{k+1}$. Эта последовательность сходится в тех же точках, что и ряд (11), и последовательность ее индексов имеет в силу второго из условий (20) относительную разреженность, равную нулю. На множестве F (мы его предполагаем, лежащим на окружности $|z|=m$) имеем в силу (19), (21) и (22)

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[m_k]{|Q_k(z)|}\leqslant\frac{q}{q_1}<1.$$

Следовательно, ряд (11) сходится равномерно на множестве F. С другой стороны, радиус сходимости ряда (12) не больше $q_1 m$, а значит меньше m, так как коэффициенты c_s этого ряда, соответствующие индексам $s=s_k=m_k+h_k+2$, имеют вид

$$c_{s_k}=\frac{1}{(q_1 m)^{m_k}}$$

и в силу второго из условий (20)

$$\varlimsup_{s\to\infty}\sqrt[s]{|c_s|}\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[s_k]{(q_1 m)^{-m_k}}=\frac{1}{q_1 m}.$$

9. Нам осталось построить множество F и выбрать последовательности натуральных чисел h_k и m_k, имеющие свойства 1, 2 и 3, указанные в предыдущем пункте.

На окружности $|z|=m$ возьмем сходящуюся последовательность точек z_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, $0\leqslant\arg z_i<\arg z_{i+1}\leqslant\pi/2$. Положим

$$z_0=\lim_{i\to\infty} z_i,\quad |z_i-z_0|=d_i,$$

и последовательность z_i, $i=0, 1, 2, \ldots$ обозначим через F. Пусть ζ_i, $i=0$ $1, 2, \ldots, n+1$, $\arg\zeta_i<\arg\zeta_{i+1}$ — точки Фекете $n+1$-го порядка для множества F. Из определения чисел Фекете следует, что

$$\alpha_n=\frac{V_{n+1}}{V_n}\leqslant\frac{V(\zeta_0, \xi_1, \ldots \zeta_{n+1})}{V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_n)}=$$

$$=\prod_{k=0}^{n}|\zeta_{n+1}-\zeta_k|\leqslant d_1\cdot d_2\ \ldots\ d_{n+1}.$$

Рассмотрим последовательность

$$\beta_k=\sqrt[m_k]{\alpha^{h_k}},$$

где $h_k=k$ и $m_k=k^2$. Из (23) следует,

$$\beta_k\leqslant\sqrt[k^2]{d_1 d_2\ \ldots\ d_{k+1}}.$$

Очевидно, что числа d_i можно выбрать настолько малыми, чтобы предел последовательности β_k был равен нулю.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 12.X.1971

Литература

1. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschrift, **17** (1923), 228–249.
2. Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., ИЛ, 1961.
3. А. Г. Нафталевич, О приближении аналитических функций алгебраическими многочленами, Liet. matem. rink., IX, № 3 (1969), 577–588.

VIENOS ABELIO TEOREMOS APIBENDRINIMAS

A. Naftalevičius

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamas toks klausimas: Ką galima pasakyti apie laipsninės eilutės konvergavimą, jei žinoma, kad aibės F taškuose konverguoja tam tikra tos laipsninės eilutės dalinių sumų seka Φ. Atvejis, kai į seką Φ įeina visos dalinės sumos, yra ištirtas atitinkamoje Abelio teoremoje.

ERWEITERUNG EINES ABELSCHEN SATZES

A. Naftalewitsch

(Zusammenfassung)

Wir behandlen die folgende Frage: Was darf man über die Konvergenz einer Potenzreihe sagen, wenn es bekannt ist, dass auf der Punktmenge F eine gewisse Folge Φ von Teilsummen dieser Potenzreihe konvergiert?

Der Fall, wenn die Folge Φ alle Teilsummen enthält, ist in den entsprechenden Abelschen Satze erörtert.