XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1972

УДК 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛАГАЕМЫХ

В. И. Паулаускас

В настоящей заметке приведем доказательство и обобщение на многомерный случай одной теоремы, анонсированной в [6].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – последовательность независимых случайных величин с функциями распределения (ф.р.)

$$P_i(x), \ M\xi_i = 0, \ M\xi_i^2 = \sigma_i^2.$$

Пусть

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_i^2}}\,dt, \quad \nu_j = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3\,|d(P_j - \Phi_j)(x)| < \infty,$$

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \quad B_{k,l}^2 = \sum_{i=k}^{l} \sigma_i^2, \quad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{B_n},$$

$$\mathscr{B}_n^2 = \frac{B_n^2}{n}, \quad \mathcal{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nu_i, \quad \mathcal{K}_n = \frac{\mathcal{V}_n}{\mathscr{B}_n^3}.$$

Нас будет интересовать оценка величины

$$\Delta_n = \sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)|,$$

где

$$F_{Z_n}(xB_n) = P_1 * P_2 * \ldots * P_n(x),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi_1 * \ldots * \Phi_n\left(\frac{x}{B_n}\right),$$

через псевдомоменты ν_j. В случае одинаково распределенных слагаемых ξ_i в работах В. В. Сазонова [8] и нашей [7] получены в некотором смысле окончательные результаты. Для разнораспределенных слагаемых единственная пока оценка такого типа принадлежит В. М. Золотареву [2] и имеет следующий вид

$$\Delta_n < C\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathcal{K}_n\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(В дальнейшем везде, если не будет оговорено, C, C_1, $C_2\ldots$ обозначают абсолютные константы.)

В случае разнораспределенных слагаемых возможно равенство $\nu_i=0$ для нескольких индексов i, т.е. $P_i\equiv\Phi_i$, а так как сумма нормальных случайных величин является нормальной величиной с суммарной дисперсией, то в дальнейшем мы будем предполагать, что $\nu_i>0$ для всех $i=1, 2, \ldots, n'$, где

$$n'=\begin{cases} n, & \text{если} \quad \nu_n>0, \\ n-1, & \text{если} \quad \nu_n=0. \end{cases}$$

Далее расположим случайные величины ξ_i так, чтобы $\max\limits_{i\leqslant j}\sigma_i^2=\sigma_j^2$, $j=1, 2, \ldots n'$, и введем следующие условия:

A1) $\sigma_i^2\leqslant C_1 B_i^2, \quad i=4, 5, \ldots n'-1, \quad \sigma_{n'}^2<C_1 B_n^2, \quad C_1<\frac{1}{3}$:

A2) $\frac{\nu_j}{\sigma_j^2}\leqslant C_2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{j}\nu_i}{B_{1,j-1}^2} \quad j=3, 4, \ldots n'-1;$

A3) $\nu_i\leqslant C_3 \mathcal{V}_i \quad i=3, 4, \ldots n'$.

Теорема. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ удовлетворяют условия* A1–A3. *Тогда для всех $n\geqslant 1$*

$$\Delta_n\leqslant C_4 \frac{1}{\sqrt{n}} \max\left(\mathcal{H}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{H}_n\right), \tag{1}$$

где C_4 зависит только от C_1-C_3.

Следствие 1. *Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно пронумеровать так, чтобы одновременно выполнялись неравенства*

$$\begin{gathered}\sigma_i^2\leqslant\sigma_2^2\leqslant\ldots\leqslant\sigma_n^2,\\ \nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\ldots\geqslant\nu_n\end{gathered} \tag{2}$$

и условие A1, тогда для всех $n\geqslant 0$ справедлива оценка (1) *с C_4, зависящей только от C_1.*

Легко заметить, что при выполнении (2), условия A2 и A3 выполняются с $C_2=C_3=1$.

Следствие 2. *Если случайные величины ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют условию A1 и условию*

$$\nu_i\leqslant\nu \quad j=1, 2, \ldots n, \tag{3}$$

то для всех $n\geqslant 1$

$$\Delta_n\leqslant C_5 \frac{1}{\sqrt{n}} \max\left(\overline{\mathcal{H}}_n^{\frac{1}{4}}, \overline{\mathcal{H}}_n\right), \tag{4}$$

где $\mathcal{H}_n=\frac{\nu}{\mathcal{B}_n^3}$, а C_5 зависит только от C_1.

Замечания. 1. Если в условии A1 потребовать $C_1<\frac{3}{10}$, то в следствиях C_4 и C_5, как функции от C_1, будут ограничены сверху абсолютной константой.

2. В условиях A1—A3 можно требовать выполнения соответствующих неравенств для $j=n_0,\ n_0+1,\ \ldots n'$, но тогда C_4 будет зависеть и от n_0.

Теперь сформулируем многомерные аналоги вышеприведенной теоремы и следствий. Отметим, что для одинаково распределенных слагаемых правильная оценка с псевдомоментами получена автором в [5], а для разнораспределенных многомерных с.в. пока единственная оценка, обобщающая одномерный уже упоминавшийся результат В. М. Золотарева [2], дана в [6] и не является правильной в том смысле, что для одинаково распределенных слагаемых дает скорость сходимости $n^{-\frac{1}{8}}$ вместо $n^{-\frac{1}{2}}$. Приводимая здесь оценка в этом смысле уже дает правильный порядок, но она еще далека от окончательной, так как получена при условиях и имеет плохую зависимость от распределений слагаемых.

Пусть $\xi_i=(\xi_{i1},\ \ldots,\ \xi_{ik})$, $i=1,\ 2,\ \ldots\ n$ — независимые невырожденные случайные векторы (с. в.) с распределениями F_i, $M\xi_{ij}=0$, $M\xi_{ij}^2=\sigma_{ij}^2$, $i=1,\ 2,\ldots n$, $j=1\ldots k$. Пусть Φ_ξ обозначает нормальное k-мерное распределение, имеющее моменты первых двух порядков, совпадающие с соответствующими моментами с.в. ξ. Обозначим

$$B_{ni}^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ji}^2,\quad \gamma_n^{(i)*}=\max_{j\leqslant n}\frac{\sigma_{j1}^2}{\sigma_{ji}^2},\quad \nu_j^{(i)}=\int|x_i|^3|(F_i-\Phi_{\xi_i})(dx)|,$$

$$\chi_n^{(i)}=\max_{j\leqslant n}\frac{|\Lambda_j^{ii}|}{|\Lambda_j|},\quad \mathscr{B}_{ni}^2=\frac{1}{n}B_{ni}^2,\quad \nu_j=\sum_{i=1}^{k}\nu_j^{(i)}\gamma_n^{(i)*}\chi_n^{(i)\frac{3}{2}},$$

$$W_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\nu_j,\quad M_n=\frac{W_n}{\mathscr{B}_{n1}^3}$$

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{B_n}$$

(покомпонентное деление, см. [5]). Будем считать $\nu_j>0$ (это условие несущественное и введено только для простоты записи). Расположим с.в. так, чтобы выполнялось равенство

$$\max_{j\leqslant i}\sigma_{j1}^2=\sigma_{i1}^2,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и введем следующие условия:

B1) $\sigma_{j1}^2\leqslant C_1'B_{j1}^2,\quad j=4,\ 5,\ \ldots,n\ C_1'<\frac{1}{3}$,

B2) $\dfrac{\nu_j}{\sigma_{j1}^2}\leqslant C_2'\dfrac{\sum_{i=1}^{j}\nu_i}{B_{j-1,1}^2},\quad j=3,\ 4,\ \ldots\ n-1,$

B3) $\nu_i\leqslant C_3'W_i\quad i=3,\ 4,\ \ldots\ n.$

Пусть $\lambda_j^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, k$ – собственные значения корреляционной матрицы с.в. Z_j, $j=1, 2, \ldots, n$ и $\Theta_n = \max\limits_{j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j^{(i)}}}$, $\mathscr{E}_2$ – класс всех универсально измеримых выпуклых множеств из R_k.

Теорема А. *Пусть с.в.* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *удовлетворяют условия B1–B3. Тогда для всех* $n\geqslant 1$

$$\sup_{A\in\mathscr{E}_2} |P(Z_n\in A)-\Phi_{Z_n}(A)| \leqslant C(k)\Theta_n \frac{1}{\sqrt{n}} \max(M_n^{\frac{1}{4}}, M_n)$$

где $C(k)\leqslant C_4' k^3$ *и* C_4' *зависит от* $C_1'-C_3'$.

Можно, следуя работе [7], показать, что из вышеприведенной оценки следует наша оценка из [5] для одинаково распределенных с.в.

Следствие 3. *Если с.в.* ξ_i, $i=1, 2, \ldots$ n *удовлетворяют условию B1 и условию*

$$\nu_j\leqslant\nu, \quad j=1, 2, \ldots n,$$

то для всех $n\geqslant 1$

$$\sup_{A\in\mathscr{E}_2} |P\{Z_n\in A\}-\Phi_{Z_n}(A)| \leqslant C_1(k) \frac{\Theta_n}{\sqrt{n}} \max(\overline{M}_n^{\frac{1}{4}}, \overline{M}_n),$$

где $\overline{M}_n = \frac{\nu}{\mathscr{B}_{n1}^3}$, $C_1(k)\leqslant C_5' k^3$ *и* C_5' *зависит только от* C_1'.

Доказательство оценки в многомерном случае мы не приводим, так как оно существенно использует доказательство в одномерном случае и метод работы [7].

Доказательство. Теорема доказывается методом композиций, и мы будем пользоваться следующими основными формулами этого метода (см., например, [3], [5])

$$\sup_x |F_{Z_n}(x)-\Phi(x)| \leqslant 2\sup_x |[(F_{Z_n}-\Phi) * \Phi_T](x)| +$$

$$+C_6\frac{1}{T}, \quad \Phi_T(x)=\Phi(xT), \quad T>0 \tag{5}$$

$$[(F_{Z_n}-\Phi) * \Phi_T](x) = \sum_{j=2}^{n'} W_{j1}(x) + \sum_{j=1}^{n'} W_{j2}(x), \tag{6}$$

где

$$W_{j1}(x) = [(\overline{P}_{1,j-1}-\overline{\Phi}_{1,j-1}) * \overline{\Phi}_{j+1,n} * \Phi_T * (\overline{P}_j-\overline{\Phi}_j)](x),$$

$$W_{j2}(x) = [\overline{\Phi}_{1,j-1} * \Phi_{j+1,n} * \Phi_T * (\overline{P}_j-\overline{\Phi}_j)](x),$$

$$P_{k,l}(x) = P_k * P_{k+1} * \ldots * P_l(x), \quad \overline{P}_{kl}(x) = P_{k,l}(xB_n), \quad \overline{P}_j(x) = P_j(xB_n).$$

Как обычно, в методе композиций применяем математическую индукцию по числу слагаемых. Индукционный базис (т. е. оценка (1) при $n=1$) легко получается таким же образом, как и в [4]:

$$\sup_x |(P_1(x)-\Phi_1(x)| \leqslant C\left(\frac{\nu_1}{\sigma_1^3}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant C_4 \max(\mathscr{N}_1^{\frac{1}{4}}, \mathscr{N}_1).$$

Теперь предположим, что для всех $i \leqslant n-1$

$$\sup_x |F_{Z_i}(x) - \Phi(x)| \leqslant C_4 \frac{1}{\sqrt{i}} \max(\mathcal{N}_i^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_i),$$

и докажем справедливость оценки (1).

Разлагая в выражении

$$W_{j2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\Phi}_{1,j-1} * \bar{\Phi}_{j+1,n} * \Phi_T)(x-y)(\bar{P}_j - \bar{\Phi}_j)(dy)$$

подынтегральную функцию в ряд Тейлора и используя условие A1, получаем

$$|W_{j2}(x)| \leqslant C_7 \frac{\nu_j}{B_n^3\left(\frac{B_n^2-\sigma_j^2}{B_n^2} + \frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n'} W_{j2}(x)\right| \leqslant C_7(1-C_1)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{B_n^3} \sum_{j=1}^{n'} \nu_j = \frac{C_7(1-C_1)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} \mathcal{N}_n. \tag{7}$$

Теперь положим

$$\varepsilon = \frac{1}{T} = C_0 \frac{\max(\mathcal{N}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_n)}{\sqrt{n}}$$

и выберем некоторое число

$$\frac{5}{8} < a < \frac{2}{3}.$$

На C_0 и C_4 наложим условие

$$\frac{C_0}{C_4} < \sqrt{\frac{1-a}{a}},$$

которое обеспечивает выполнение неравенства $a(1+\varepsilon^2) < 1$ (так как нам достаточно рассматривать случай

$$C_4 \frac{\max(\mathcal{N}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_n)}{\sqrt{n}} < 1\Big).$$

Определим q как наименьший номер, для которого

$$B_{1,q}^2 > a(1+\varepsilon^2)B_n^2. \tag{8}$$

Ясно, что $1 \leqslant q \leqslant n$. Сумму $\sum_{j=2}^{n'} W_{j1}(x)$ разделим на три: $\sum_{j=2}^{q}$, $\sum_{j=q+1}^{n'-1}$ и $W_{n'1}$ (если $q=1$, то первая сумма пустая, а если $q=n$, то остается только первая сумма) и каждую сумму оценим отдельно.

1. Оценивая так же, как и члены $W_{j2}(x)$, и применяя неравенство

$$\sup_x |(\bar{P}_{1,j-1} - \bar{\Phi}_{1,j-1})(x)| \leqslant 1,$$

получаем

$$\left|\sum_{j=2}^{q} W_{j1}(x)\right| \leqslant C_8 \sum_{j=2}^{q} \frac{\nu_j}{(B_{j+1,\,n}^2+\varepsilon^2 B_n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но

$$B_{j+1,\,n}^2+\varepsilon^2 B_n^2 = B_n^2(1+\varepsilon^2) - B_{1,\,j-1}^2 - \sigma_j^2 \geqslant B_n^2(1-a-C_1),$$

так как

$$B_{1,\,j-1}^2 \leqslant a(1+\varepsilon^2) B_n^2,$$

если $j \leqslant q$, поэтому

$$\left|\sum_{j=2}^{q} W_{j1}(x)\right| \leqslant C_9 \frac{\sum_{j=2}^{q} \nu_j}{B_n^3} \leqslant C_9 \frac{\mathcal{N}_n}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

2. Используя индукционную предпосылку

$$\sup_x |\overline{P}_{1,\,j-1}(x) - \overline{\Phi}_{1,\,j-1}(x)| \leqslant C_4 \frac{\max(\mathcal{N}_{j-1}^{\frac{1}{4}},\ \mathcal{N}_{j-1})}{\sqrt{j-1}}$$

и условие A2, получаем

$$\left|\sum_{j=q+1}^{n'-1} W_{j1}(x)\right| \leqslant C_{10} C_4 \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\max(\mathcal{N}_{j-1}^{\frac{1}{4}},\ \mathcal{N}_{j-1})\,\nu_j}{\sqrt{j-1}\,(B_{j+1,\,n}^2+\varepsilon^2 B_n^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\cdot C_4\cdot C_2 \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\max(\mathcal{N}_{j-1}^{\frac{1}{4}},\ \mathcal{N}_{j-1})\,\sigma_j^2 \sum_{i=1}^{j} \nu_j}{\sqrt{j-1}\,(B_{j+1,\,n}^2+\varepsilon^2 B_n^2)^{\frac{3}{2}}\, B_{1,\,j-1}^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\cdot C_4\cdot C_2\, n\mathcal{V}_n (I_1+I_2), \tag{10}$$

где

$$I_1 = \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\mathcal{N}_{j-1}^{\frac{1}{4}}\,\sigma_j^2}{\sqrt{j-1}\,B_{1,\,j-1}^2\,(B_{j+1,\,n}^2+\varepsilon^2 B_n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$I_2 = \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\mathcal{N}_{j-1}\,\sigma_j^2}{\sqrt{j-1}\,B_{1,\,j-1}^2\,(B_{j+1,\,n}^2+\varepsilon^2 B_n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как $\mathcal{N}_j = \sqrt{j}\,\dfrac{\sum_{i=1}^{j} \nu_j}{B_j^3}$ и $j = \dfrac{B_j^2}{\mathcal{B}_j^2}$, то

$$\frac{\mathcal{N}_j^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{j}} \leqslant \frac{n^{\frac{1}{4}}\,\mathcal{V}_n^{\frac{1}{4}}\,\mathcal{B}_j^{\frac{3}{4}}}{B_j^{\frac{3}{2}}}.$$

Тогда

$$I_1 \leqslant n^{\frac{1}{4}} \mathcal{V}_n^{\frac{1}{4}} \max_{j\leqslant n'-1} \mathscr{B}_j^{\frac{3}{4}} \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\sigma_j^2}{B_{1,j-1}^{\frac{7}{2}} [B_n^2(1+\varepsilon^2)-\sigma_j^2-B_{1,j-1}^2]^{\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant n^{\frac{1}{4}} \mathcal{V}_n^{\frac{1}{4}} \max_{j\leqslant n'-1} \mathscr{B}_j^{\frac{3}{4}} \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\sigma_j^2}{B_{1,j-1}^{\frac{7}{2}} (b-B_{1,j-1}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{11}$$

где обозначено $b=(1+\varepsilon^2)B_n^2-\sigma_{n'}^2$.

Легко усмотреть, что функция $x^{\frac{7}{4}}(b-x)^{\frac{3}{2}}$ имеет отрицательную производную $(b-x)^{\frac{1}{2}}\left(b-\frac{13}{7}x\right)$, когда x меняется от $B_{1,q}^2$ до $B_{n'-1}^2$, так как

$$b-x=(1+\varepsilon^2)B_n^2-\sigma_{n'}^2-B_{1,j-1}^2 \geqslant (1+\varepsilon^2)B_n^2-\sigma_{n'}^2-B_{n'-1}^2=\varepsilon^2 B_n^2>0,$$

$$b-\frac{13}{7}x=(1+\varepsilon^2)B_n^2-\sigma_{n'}^2-\frac{13}{7}B_{1,j-1}^2 \leqslant (1+\varepsilon^2)B_n^2-\frac{13}{7}a(1+\varepsilon^2)B_n^2=$$

$$=(1+\varepsilon^2)B_n^2\left(1-\frac{13}{7}a\right)<0.$$

Поэтому

$$\sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\sigma_j^2}{B_{1,j-1}^{\frac{7}{2}}(b-B_{1,j-1}^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{B_{1,q}^2}^{B_{n'-1}^2} \frac{dx}{x^{\frac{7}{4}}(b-x)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{B_{1,q}^{\frac{1}{2}}} \int_{B_{1,q}^2}^{B_{n'-1}^2} \frac{dx}{[x(b-x)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{12}$$

Делая замену $\frac{b-x}{x}=v^2$, и обозначая $v_1^2=\frac{b-B_{n'-1}^2}{B_{n'-1}^2}$, $v_2^2=\frac{b-B_{1,q}^2}{B_{1,q}^2}$, как и в работе [1], получаем

$$\int_{B_{1,q}^2}^{B_{n'-1}^2} \frac{dx}{[x(b-x)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{b^2}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1+v^2}{v^2}\,dv \leqslant \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{v_1}+v_2\right). \tag{13}$$

Имеем

$$v_1^2=\frac{(1+\varepsilon^2)B_n^2-\sigma_{n'}^2-B_{n'-1}^2}{B_{n'-1}^2} \geqslant \frac{\varepsilon^2 B_n^2}{B_{n'-1}^2}>\varepsilon^2,$$

$$v_2^2 \leqslant \frac{(1+\varepsilon^2)B_n^2-(1+\varepsilon^2)aB_n^2}{a(1+\varepsilon^2)B_n^2}=\frac{1-a}{a},$$

$$b>(1-C_1)B_n^2. \tag{14}$$

Из (12)—(14) вытекает

$$\sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\sigma_j^2}{B_{1,j-1}^{\frac{7}{2}}[b-B_{1,j-1}^2]^{\frac{3}{2}}} \leqslant C_{11}\frac{1}{B_n^{\frac{9}{2}}\varepsilon}+C_{12}\frac{1}{B_n^{\frac{9}{2}}},$$

а тогда из (11)

$$I_1 \leqslant n^{\frac{1}{4}} \mathcal{V}_n^{\frac{1}{4}} \max_{j\leqslant n'-1} \mathscr{B}_j^{\frac{3}{4}} \left(\frac{C_{11}}{B_n^{\frac{9}{2}}\varepsilon}+\frac{C_{12}}{B_n^{\frac{9}{2}}}\right). \tag{15}$$

Оценим вторую сумму из (10):

$$I_2 \leqslant n \mathfrak{I}'_n \sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\sigma_j^2}{B_{1,\,j-1}^5 \left[(1+\varepsilon^2) B_n^2 - \sigma_{n'}^2 - B_{1,\,j-1}^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{16}$$

Как и прежде, легко удостовериться, что в рассматриваемом интервале $q+1 \leqslant \leqslant j \leqslant n'-1$ функция $x^{\frac{5}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}$ имеет отрицательную производную, поэтому

$$\sum_{j=q+1}^{n'-1} \frac{\sigma_j^2}{B_{1,\,j-1}^5 (b-B_{1,\,j-1}^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{B_{1,\,q}^2}^{B_{n'-1}^2} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

Получен такой же интеграл, как и в [1]. Производя замену переменных

$$\frac{b-x}{x} = v^2,$$

имеем

$$\int_{B_{1,\,q}^2}^{B_{n'-1}^2} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} \int_{v_1}^{v_2} \frac{(1+v^2)^2}{v^2}\, dv < \frac{1}{b^3} \left(\frac{1}{v_1} + 2v_2 + \frac{1}{3} v_2^3\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_n^6 (1-C_1)^3} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1-a}{a}} \left(\frac{1+5a}{3a}\right)\right]. \tag{18}$$

Из (16)–(18) получаем

$$I_2 \leqslant \frac{C_{13} n \mathfrak{I}'_n}{B_n^6 \varepsilon} + \frac{C_{14} n \mathfrak{I}'_n}{B_n^6}.$$

Последняя оценка вместе с (10) и (15) дает

$$\left| \sum_{j=q+1}^{n'-1} W_{j1}(x) \right| \leqslant \frac{C_{15} C_4 n^{\frac{5}{4}} \mathfrak{I}'^{\frac{5}{4}}_n \max\limits_{j \leqslant n'-1} \mathscr{B}_j^{\frac{3}{4}}}{B_n^{\frac{9}{2}} \varepsilon} +$$

$$+ \frac{C_{16} C_4 n^{\frac{5}{4}} \mathfrak{I}'^{\frac{5}{4}}_n \max\limits_{j \leqslant n'-1} \mathscr{B}_n^{\frac{3}{4}}}{B_n^{\frac{9}{2}}} + \frac{C_4 n^2 \mathfrak{I}'^2_n}{B_n^6} \left(\frac{C_{17}}{\varepsilon} + C_{18}\right). \tag{19}$$

Так как у нас $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{n'}^2$, то

$$\max_{\leqslant n'-1} \mathscr{B}_j^2 = \mathscr{B}_{n'-1}^2, \quad \mathscr{B}_{n'-1}^2 = \frac{1}{n'-1} B_{n'-1}^2 \leqslant \frac{1}{n'-1} B_n^2 \leqslant 3 \mathscr{B}_n^2.$$

Поэтому, подставляя в (19) выражение ε и $B_n^2 = n \mathscr{B}_n^2$ и используя неравенства

$$\frac{\max\limits_{j \leqslant n'-1} \mathscr{B}_j^{\frac{3}{4}}}{\mathscr{B}_n^{\frac{3}{4}}} \leqslant (3)^{\frac{3}{8}}, \quad \frac{n \mathfrak{I}'_n}{B_n^3} < \frac{1}{C_4},$$

получаем

$$\left| \sum_{j=q+1}^{n'-1} W_{j1}(x) \right| \leqslant \frac{\max(\mathcal{N}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{C_{19} C_4}{C_0} + C_{20} \right). \tag{20}$$

3. Последний член суммы из (6) оцениваем так:

$$| W_{n'1}(x) | \leqslant C_8 \frac{C_4}{\sqrt{n'-1}} \max(\mathcal{N}_{n'-1}^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_{n'-1}) \frac{\nu_{n'}}{B_n^3 \varepsilon^3}. \tag{21}$$

Имеем

$$\mathcal{B}_{n'-1}^2 = \frac{1}{n'-1} B_{n'-1}^2 > \frac{1}{n'} (B_{n'}^2 - \sigma_{n'}^2) > (1 - C_1) \mathcal{B}_{n'}^2.$$

Далее мы можем считать $q \leqslant n' - 1$ (иначе вся сумма $\sum_{j=1}^{n'}$ оценивалась бы в пункте 1), а тогда $B_{n'}^2 > a(1+\varepsilon^2) B_n^2 > \frac{5}{8} B_n^2$ и $\mathcal{B}_{n'}^2 > \frac{5}{8} \mathcal{B}_n^2$.

Поэтому $\mathcal{B}_{n'-1}^2 > \frac{5}{8}(1 - C_1)\mathcal{B}_n^2$, а $\mathcal{V}_{n'-1} < 3\mathcal{V}_n$; используя условие А3, из (21) получаем

$$| W_{n'1}(x) | \leqslant \frac{C_{21} C_4}{\sqrt{n}} \max(\mathcal{N}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_n) \frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{B}_n^3 C_0^3 \max(\mathcal{N}_n^{\frac{3}{4}}, \mathcal{N}_n^3)} \geqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{21} C_4}{C_0^3} \frac{\max(\mathcal{N}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_n)}{\sqrt{n}}. \tag{22}$$

Теперь из основного неравенства (5), тождества (6) и оценок (7), (9), (20) и (22) получаем

$$\sup_x | F_{Z_n}(x) - \Phi(x) | \leqslant \frac{\max(\mathcal{N}_n^{\frac{1}{4}}, \mathcal{N}_n)}{\sqrt{n}} \left\{ 2C_4 \left(\frac{C_{19}}{C_0} + \frac{C_{21}}{C_0^3} \right) + \right.$$

$$\left. + 2C_7 (1 - C_1)^{-\frac{3}{2}} + 2(C_9 + C_{20}) + C_0 C_6 \right\}.$$

Остается выбрать C_0 и C_4 такие, чтобы выражение в фигурных скобках не превышало C_4 и, кроме того, выполнялось условие

$$C_0 < C_4 \sqrt{\frac{1-a}{a}}.$$

Этим и завершается доказательство теоремы.

Доказательство следствия 2 теперь очевидно: везде оцениваем $\nu_j \leqslant \nu$; а вместо условий А2 и А3 теперь пользуемся условиями $\frac{\nu_j}{\sigma_j^2} < \frac{j\nu}{B_{1,j-1}^2}$ (которые выполняются за счет неравенств $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{n'}^2$) и $\nu_j \leqslant \nu$, соответственно.

Дополнение. После того как заметка была подготовлена к печати, нам стало известно, что в печати находится работа С. В. Нагаева и В. Ротаря, в которой рассматривается тот же самый вопрос, только в одномерном случае и методом характеристических функций. В этой работе используются не псевдомоменты, а разностные моменты, введенные В. М. Золотаревым в [9] и еще лучше отражающие близость распределений. Если F и G — два распределения, то псевдомомент и разностный момент r-го порядка определяется равенствами

$$\nu(r)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r|d(F-G)(x)|$$

и

$$\chi(r)=r\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{r-1}|F(x)-G(x)|\,dx, \qquad r>1$$

соответственно, и известно, что $\chi(r)\leqslant\nu(r)$.

Оказывается, что все одномерные оценки из наших работ [4], [10], [11] и настоящей работы можно усилить, заменяя в формулировках теорем псевдомоменты r-го порядка разностными моментами того же порядка. Например, теорему из [4] можно сформулировать следующим образом.

Теорема. *Пусть* ξ_i, $i=1, 2, \ldots n$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины с ф.р.* $F(x)$, $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2=1$ *и конечным третьим моментом,* $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. *Тогда существует абсолютная константа* C, *такая, что для всех* $n\geqslant 1$

$$\sup_x|P\{S_n<x\}-\Phi(x)|\leqslant C\,\frac{\max(\chi_3^{\frac{1}{4}},\chi_3)}{\sqrt{n}},$$

$$\chi_3=3\int_{-\infty}^{\infty}x^2|F(x)-\Phi(x)|\,dx.$$

Такую замену можно обосновать следующими рассуждениями. В выше упомянутых работах так же, как и в настоящей, псевдомоменты получались в следующей схеме. Имеется функция ограниченной вариации $H(x)$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty}x^i\,dH(x)=0$ для $i=0, 1, 2, \ldots m$ и некоторого целого $m\geqslant 1$. Функция $V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y)\,dH(y)$ оценивается при помощи разложения $G(x-y)$ в ряд Тейлора следующим образом (для простоты записи $m=2$):

$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y)\,dH(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[G(x)-G'(x)y+\frac{1}{2}G''(x)y^2-$$

$$-\frac{1}{6}G'''(x+\Theta y)y^3\Big]\,dH(y)=-\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}G'''(x+\Theta y)y^3\,dH(y),$$

$$|V(x)|\leqslant\frac{1}{6}\sup_u|G'''(u)|\int_{-\infty}^{\infty}|y|^3|dH(y)$$

и мы получаем псевдомомент третьего порядка.

Но мы можем произвести интегрирование по частям в интеграле

$$V(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[G(x-y)+G(x)+G'(x)y-\frac{1}{2}G''(x)y^2\right]dH(y)$$

и получить

$$V(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[-G'(x-y)+G'(x)-G''(x)y]H(y)\,dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G'''(x+\Theta y)y^2H(y)\,dy.$$

Отсюда

$$|V(x)|\leqslant\frac{1}{6}\sup_u|G'''(u)|\,3\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2|H(y)|\,dy$$

и мы видим, что получили такую же самую оценку, только вместо псевдомомента теперь имеем разностный момент целого порядка. Аналогично рассуждаем и в случае любого $m<r\leqslant m+1$.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
14.X.1971

Литература

1. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Skand. Aktuarietidskrift, No 1—2, (1949).
2. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., 9, 3 (1965).
3. H. Bergström, A comparision method for distribution functions of sums of independent and dependent random variables, Теория вероятн. и ее примен., 15, 3 (1970).
4. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Liet. matem. rink., IX, № 2 (1969).
5. В. Паулаускас, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II, Liet. matem. rink., IX, № 4 (1969).
6. В. Паулаускас, Об оценках скорости сходимости в предельных теоремах посредством псевдомоментов, ДАН СССР, 199, № 1 (1971).
7. В. Паулаускас, О многомерной предельной теореме, Liet. matem. rink., X, № 4 (1970).
8. В. В. Сазонов, Оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Труды VI Берклийского симпозиума по теории вероятностей и матем. статистике (в печати).
9. В. М. Золотарев, Некоторые новые результаты, связанные с метрикой Леви, ДАН СССР, 190, № 5 (1970).
10. В. И. Паулаускас, Одна теорема о скорости сходимости в центральной предельной теореме, Liet. matem. rink., XI, № 1 (1971).
11. В. И. Паулаускас, Одна оценка скорости сходимости с использованием псевдомоментов, Liet. matem. rink., XI, № 2 (1971).

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIEMS DĖMENIMS

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Straipsnyje įrodoma teorema apie konvergavimo greičio įvertinimą centrinėje ribinėje teoremoje nevienodai pasiskirsčiusiems dėmenims, kuri buvo anksčiau paskelbta be įrodymo [6]; suformuluotas šios teoremos analogas daugiamačiu atveju. Parodoma, kad visi įrodymai su pseudomomentais, gauti autoriaus darbuose [4], [10], [11] ir šiame darbe, gali būti pagerinti, pakeičiant pseudomomentus vadinamaisiais skirtuminiais momentais [9].

ON THE ESTIMATE OF THE REMAINDER TERM IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR NON-EQUALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES

V. Paulauskas

(*Summary*)

In the paper an estimate of the remainder term in the central limit theorem for non-equally distributed random variables, announced in [6], is given. The multi-dimensional generalization of the theorem is stated too. In addition it is shown that all the results in [4], [10], [11] can be strenghtened by changing pseudomoments with the so-called difference moments (see [9]).