XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1972

УДК 519.21

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ОПЕРАТОРНЫМИ ВОСПРОИЗВОДЯЩИМИ ЯДРАМИ

Э. А. Сенкене, А. А. Темпельман

Воспроизводящие ядра (см. [1]) широко используются в теории случайных функций, в теории функций одного и нескольких комплексных переменных и в других областях. В работе [2] введено понятие операторных воспроизводящих ядер, играющих аналогичную роль в теории векторнозначных функций. В настоящей статье изучаются операторные воспроизводящие ядра и некоторые их приложения.

В п.п. 1 и 2 рассмотрены основные свойства операторных воспроизводящих ядер. В п. 3 изучаются разложения операторных воспроизводящих ядер, соответсвующие заданному разложению единицы. В п.4 эти результаты используются для получения канонических представлений векторнозначных случайных процессов.

1. Элементарные свойства гильбертовых пространств с операторными возпроизводящими ядрами

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство; $(.\,,.)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$; T — произвольное множество; $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ — множество аддитивных и однородных операторов; $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — множество линейных операторов, т. е. подмножество непрерывных операторов в $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. $R(s,\ t)$ — $\mathcal{A}(\mathcal{H})$-значная функция на $T\times T. H$ — гильбертово пространство $\mathcal{H}$-значных функций, определенных на T; $\langle .\,,.\rangle$ — скалярное произведение в H.

Определение 1 (ср. [2]). *$\mathcal{A}(\mathcal{H})$-значная функция $R(s,\ t)$, $s,\ t\in T$, называется воспроизводящим ядром пространства H, если при любых $x\in\mathcal{H}$, $t\in T$ и при любой $\mathcal{H}$-значной функции $f(\cdot)\in H$ а) функция $R(.\,,t)x\in H$; б) $\langle R(\cdot,\ t)\,x,\ f(\cdot)\rangle=\big(x,\ f(t)\big)$* („воспроизводящее свойство").

Остановимся на некоторых свойствах воспроизводящих ядер.

Теорема 1.1. *Гильбертово пространство функций может обладать только одним воспроизводящим ядром $R(s,\ t)$, $s,\ t\in T$.*

Доказательство. Пусть существует другое воспроизводящее ядро $R'(s,\ t)$, $s,\ t\in T$; тогда в силу воспроизводящего свойства при некоторых $t\in T$ и $x\in\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}0<\|[R(\cdot,\ t)-R'(\cdot,\ t)]\,x\|^2&=<R(\cdot,\ t)\,x,\ R(\cdot,\ t)\,x>-\\&-<R(\cdot,t)\,x,\ R'(\cdot,t)\,x,>-<R'(\cdot,t)\,x,\ R(\cdot,t)\,x>+\\&+R'(\cdot,t)\,x,\ R'(\cdot,t)\,x>=\\&=\big(x,R(t,t)\,x\big)-\big(x,R'(t,t)\,x\big)-\big(x,R(t,t)\,x\big)+\big(x,R'(t,t)\,x\big)=0.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает наше утверждение.

Гильбертово пространство H с воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$, обозначим $H(R)$.

Теорема 1.2. *Воспроизводящее ядро $R(s, t)$, s, $t \in T$, гильбертова пространства $\mathcal{H}$-значных функций H является $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значной функцией.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь непрерывность оператора $R(s, t)$, s, $t \in T$. Сначала докажем непрерывность оператора $R(t, t)$ при любом $t \in T$. Оператор $R(t, t)$ симметричен, так как в силу воспроизводящего свойства для любых $t \in T$ и $x \in \mathcal{H}$

$$\left(x, R(t,t)y\right) = \overline{\langle R(\cdot, t)y, R(\cdot, t)x \rangle} = \left(\overline{y, R(t,t)x}\right) = \left(R(t,t)x, y\right).$$

Поэтому непрерывность оператора $R(t, t)$ вытекает из известной теоремы Хеллингера–Тёплица (см., например, [3]). Далее, из воспроизводящего свойства и неравенства Коши–Буняковского получаем при любых s, $t \in T$ и $x \in \mathcal{H}$.

$$\left|\left(x, R(s,t)x\right)\right| = \left|\langle R(\cdot, s)x,\ R(\cdot, t)x \rangle\right| \leqslant \|R(\cdot, s)x\| \cdot \|R(\cdot, t)x\| =$$

$$= \langle R(\cdot, s)x,\ R(\cdot, s)x \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle R(\cdot, t)x,\ R(\cdot, t)x \rangle^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(x, R(s,s)x\right)^{\frac{1}{2}} \left(x,\ R(t,t)x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|R(s,s)\|^{\frac{1}{2}}\ \|R(t,t)\|^{\frac{1}{2}}\ \|x\|^2.$$

Таким образом,

$$\|R(s,t)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\left|\left(x, R(s,t)x\right)\right|}{\|x\|^2} \leqslant \|R(s,s)\|^{\frac{1}{2}}\ \|R(t,t)\|^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, все операторы $R(s, t)$, s, $t \in T$, непрерывны.

Установим теперь критерий того, что данное гильбертово пространство H, состоящее из $\mathcal{H}$-значных функций на T, обладает воспроизводящим ядром. Рассмотрим „точечный“ оператор F_t $(t \in T)$ из H в $\mathcal{H}$, определяемый соотношением: $F_t g = g(t)$ для любой функции $g(\cdot) \in H$. Очевидно, этот оператор аддитивен и однороден.

Теорема 1.3. *Если гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$, то все операторы F_t $(t \in T)$ непрерывны. Обратно, если все операторы F_t $(t \in T)$ слабо непрерывны (т.е. при любых $t \in T$, $x \in \mathcal{H}$, функционалы $\varphi_{t,x}(g) = (x, F_t g)$ на H непрерывны), то гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $H = H(R)$, т.е. гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$; тогда в силу воспроизводящего свойства и неравенства Коши–Буняковского при любых $t \in T$, $x \in \mathcal{H}$ и $g(\cdot) \in H(R)$ имеем:

$$\left|\left(x, g(t)\right)\right| = \left|\langle R(\cdot, t)x,\ g(\cdot) \rangle\right| \leqslant \|R(\cdot, t)x\| \cdot \|g(\cdot)\| =$$

$$= \left(x,\ R(t,t)x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|g(\cdot)\| \leqslant \|R(t,t)\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|g(\cdot)\| \cdot \|x\|.$$

Отсюда получаем, что при любом $g(\cdot)\in H(R)$

$$\|F_t g\| = \|g(t)\| \leqslant \|R(t,t)\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|g(\cdot)\|, \tag{1.1}$$

и, значит, оператор F_t непрерывен.

Достаточность. Пусть для любых $t\in T$ и $x\in\mathcal{H}$ функционал $\varphi_{t,x}(g)=(x, F_t g)$ непрерывен. По теореме Рисса в H существует функция $y_{t,x}(\cdot)$ такая, что

$$\varphi_{t,x}(g)=(x, F_t g)=\left(x, g(t)\right)= \langle y_{t,x}(\cdot), g(\cdot)\rangle. \tag{1.2}$$

Фиксируем s, t из T и рассмотрим в $\mathcal{H}$ оператор $R(s, t)$, переводящий вектор x в $y_{t,x}(s)$. Легко убедиться, что $R(s, t)\in\mathscr{A}(\mathcal{H})$. Далее, очевидно, что функция $R(\cdot, t)x\in H$ при любых $t\in T$ и $x\in H$, и что последнее равенство в соотношении (1.2) выражает воспроизводящее свойство ядра $R(s, t)$, s, $t\in T$. Теорема доказана.

Теорема 1.4. *Для того, чтобы $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ – значная функция $R(s, t)$, s, $t\in T$, была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства H, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательно определенной, т. е. чтобы $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(x_i, R(s_i, s_j)x_j\right)\geqslant 0$ при любом натуральном числе n и при любых $s_1, s_2, \ldots, s_n\in T$, $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathcal{H}$. Это гильбертово пространство $H=H(R)$ единственно; оно является замыканием линейной оболочки функций $R(.\,, t)x$ по норме, определяемой скалярным произведением*

$$\langle R(\cdot, s)x,\ R(\cdot, t)y\rangle = \left(x,\ R(s,t)y\right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $R(s, t)$, s, $t\in T$, – воспроизводящее ядро гильбертова пространства H; тогда свойство неотрицательной определенности функции $R(s, t)$, s, $t\in T$, немедленно следует из воспроизводящего свойства:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_i,\ R(s_i, s_j)\,x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} R(s_i, s_j)\,x_j\right)=$$

$$=\left\langle \sum_{i=1}^{n} R(\cdot, s_i)x_i,\ \sum_{j=1}^{n} R(\cdot, s_j)\,x_j\right\rangle=\left\|\sum_{i=1}^{n} R(\cdot, s_i)x_i\right\|^2\geqslant 0.$$

Достаточность. Определим пространство H_0 как множество функций $f(\cdot)$ вида

$$f(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ R(\cdot, t_i)\,x_i,$$

где α_i – числа, $t_i\in T$, $x_i\in\mathcal{H}$, $i=1, 2, \ldots, n$, и введем скалярное произведение двух функций

$$f_1(\cdot)=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{(1)} R(\cdot, t_i^{(1)})\,x_i^{(1)} \quad \text{и} \quad f_2(\cdot)=\sum_{j=1}^{n_2}\alpha_j^{(2)} R(\cdot, t_j^{(2)})\,x_j^{(2)},$$

принадлежащих H_0, следующим образом:

$$\langle f_1(\cdot), f_2(\cdot)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^{(1)} R(\cdot, t_i^{(1)}) x_i^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^{(2)} R(\cdot, t_j^{(2)}) x_j^{(2)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \left(\alpha_i^{(1)} x_i^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^{(2)} R(t_i^{(1)}, t_j^{(2)}) x_j^{(2)}\right).$$

Нетрудно проверить, что 1) для любого $t \in T$ „точечный" оператор F_t, определенный в H_0 и переводящий

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(\cdot, t_i) x_i \quad \text{в} \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(t, t_i) x_i,$$

слабо непрерывен, и 2) для фундаментальной последовательности

$$\{f_m(\cdot)\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i^{(m)} R(\cdot, t_i^{(m)})\, x_i^{(m)} \right\}$$

из H_0 условие $\left(x, f_m(t)\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ для каждого $t \in T$ и $x \in \mathcal{H}$ влечет за собой соотношение $\|f_m(\cdot)\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Проведя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы о функциональном пополнении из [1], мы можем доказать, что H_0 можно пополнить до гильбертова пространства $\mathcal{H}$-значных функций H на T. Покажем, что функция $R(s, t)$, s, $t \in T$, является воспроизводящим ядром гильбертова пространства H. Прежде всего, функция $R(\cdot, t)x \in H_0 \subset H$ при любых $t \in T$ и $x \in \mathcal{H}$. Далее, если $f(\cdot) \in H_0$, т.е.

$$f(\cdot)| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(\cdot, t_i) x_i,$$

где α_i — некоторые числа, $t_i \in T$, $x_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\langle R(\cdot, t) x, f(\cdot)\rangle = \left\langle R(\cdot, t) x, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(\cdot, t_i) x_i \right\rangle =$$

$$= \left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(t, t_i) x_i\right) = \left(x, f(t)\right).$$

Пусть теперь $f(\cdot)$ — произвольная функция из H, и пусть $\{f_n(\cdot)\}$ — последовательность функций из H_0, сходящаяся к $f(\cdot)$. Имеем:

$$\langle R(\cdot, t) x, f(\cdot)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle R(\cdot, t) x, f_n(\cdot)\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(x, f_n(t)\right) = \left(x, f(t)\right).$$

Таким образом, функция $R(s, t)$, s, $t \in T$, является воспроизводящим ядром гильбертова пространства H. Теперь докажем, что H — единственное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$. Пусть существует другое гильбертово пространство $\tilde{H}$. Очевидно, $H_0 \subset \tilde{H}$. Отсюда легко вывести, что построенное выше гильбертово пространство H является подпространством в $\tilde{H}$. Пусть $f(\cdot)$ — элемент в $\tilde{H}$, ортогональный к H. Тогда он ортогонален и к H_0, и в силу воспроизводящего свойства ядра $R(s, t)$, s, $t \in T$, при всех $x \in \mathcal{H}$, $t \in T$ $\left(x, f(t)\right) = < R(\cdot, t)\, x, f(\cdot) > = 0$.

Отсюда следует, что $f(\cdot) = 0$. Таким образом, $\tilde{H} = H$. Теорема доказана.

Теорема 1.5. *Если гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$, то 1) из сильной сходимости последовательности функций $\{f_n(\cdot)\}$ в $H(R)$ вытекает сильная сходимость последовательности элементов $\{f_n(t)\}$ в $\mathcal{H}$ при любом $t \in T$; и 2) из слабой сходимости в $H(R)$ вытекает слабая сходимость в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. 1) Пусть последовательность $\mathcal{H}$-значных функций $\{f_n(\cdot)\} \in H(R)$ сильно сходится к $f(\cdot) \in H(R)$, т.е.

$$\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_{H(R)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Неравенство (1.1) дает:

$$\|f_n(t) - f(t)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \| R(t, t) \|^{\frac{1}{2}} \cdot \|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_{H(R)} .$$

Таким образом, $\{f_n(t)\}$ сильно сходится к $f(t)$, причем сходимость равномерна на каждом подмножестве из T, на котором функция $R(t, t)$ равномерно ограничена. 2) Если последовательность $\{f_n(\cdot)\} \in H(R)$ слабо сходится в $H(R)$ к $f(\cdot) \in H(R)$, то для любой функции $R(\cdot\ , t)x \in H(R)$

$$\lim_{n \to \infty} \left(x, f_n(t)\right) = \lim_{n \to \infty} \langle R(\cdot, t)x, f_n(\cdot)\rangle = \langle R(\cdot, t)x, f(\cdot)\rangle = \left(x, f(t)\right) .$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Теорема 1.6. *Если гильбертово пространство H с воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$, является подпространством гильбертова пространства $\tilde{H}$ функций на T, то оператор $\Pi_H^{\tilde{H}}$, определяемый формулой:*

$$\left(x, (\Pi_H^{\tilde{H}} h)(t)\right) = \langle R(\ \ , t)x, h(\cdot)\rangle_{\tilde{H}}$$

для любых $t \in T$, $x \in \mathcal{H}$ и $h(\cdot) \in \tilde{H}$, является оператором проектирования на подпространство H.

Доказательство. Запишем $h(\cdot) \in \tilde{H}$ в виде $h(\cdot) = f(\cdot) + g(\cdot)$, где $f(\cdot) \in H$, $g(\cdot) \perp H$. Функция $R(\cdot\ , t)x \in H$ при любых $t \in T$ и $x \in \mathcal{H}$, поэтому

$$\langle R(\cdot, t)x, h(\cdot)\rangle_{\tilde{H}} = \langle R(\cdot, t)x, f(\cdot) + g(\cdot)\rangle_{\tilde{H}} =$$
$$= \langle R(\cdot, t)x, f(\cdot)\rangle_H = \left(x, f(t)\right) .$$

Теорема 1.7. *Если гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$, то каждое замкнутое подпространство H_0 из H тоже обладает воспроизводящим ядром $R_0(s, t)$, s, $t \in T$. Воспроизводящее ядро $R_0(s, t)$, s, $t \in T$, подпространства H_0 связано с ядром $R(s, t)$, s, $t \in T$, следующим соотношением: $R_0(\cdot\ , t)x = \Pi_{H_0}^{H} R(\cdot\ , t)x$ для любых $t \in T$ и $x \in \mathcal{H}$.*

Это простое следствие теорем 1.3 и 1.6.

Теорема 1.8. *Если H_1 и H_2 — два взаимно дополнительных подпространства в гильбертовом пространстве H, т.е. $H=H_1\oplus H_2$, то их воспроизводящие ядра удовлетворяют условию: $R(s, t)=R_1(s, t)+R_2(s, t)$, где $R_1(s, t)$ и $R_2(s, t)$ — воспроизводящие ядра H_1 и H_2, соответственно.*

Это утверждение немедленно следует из теоремы 1.7.

2. Сужение, сумма и произведение операторных воспроизводящих ядер

Следующие две теоремы являются простым обобщением теорем о сужении и сумме воспроизводящих ядер из [1].

Теорема 2.1. *Если $R(s, t)$, $s, t\in T$, — воспроизводящее ядро гильбертова пространства H функций, определенных на T, с нормой $\|\cdot\|$, то $R(s, t)$, $s, t\in T_1\subset T$, есть воспроизводящее ядро пространства H_1 всех сужений функций из H на подмножество T_1, и норма $\|\cdot\|_1$ каждой функции $f_1(\cdot)\in H_1$ задается равенством*

$$\|f_1(\cdot)\|_1=\min \|f(\cdot)\|,$$

где минимум берется по всем $f(\cdot)\in H$, сужением которых на T_1 является $f_1(\cdot)$.

Теорема 2.2. *Если $R_i(s, t)$, $s, t\in T$, $i=1, 2,\ldots, n$, — операторные воспроизводящие ядра гильбертовых пространств $H(R_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, функций, определенных на множестве T, с нормами $\|\cdot\|_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, соответственно, то $R(s, t)=\sum_{i=1}^{n} R_i(s, t)$ является операторным воспроизводящим ядром гильбертова пространства $H(R)$ всех функций*

$$f(\cdot)=\sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot), \tag{2.1}$$

$$f_i(\cdot)\in H(R_i),\ i=1, 2, \ldots, n, \text{ норма } \|f(\cdot)\|=\min\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i(\cdot)\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где минимум берется по всем представлениям $f(\cdot)$ в виде (2.1).

В простейшем случае, когда $H(R_i)\cap H(R_{i+1})=\{0\}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, имеем:

$$H(R)=\sum_{i=1}^{n}\oplus H(R_i) \quad \text{и} \quad \|f(\cdot)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i(\cdot)\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь произведения воспроизводящих ядер.

Напомним, что тензорным произведением $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ двух гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называется гильбертово пространство всех линейных операторов типа Гильберта—Шмидта, отображающих $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}_1$; скалярное произведение любых операторов А и В из $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ равно следу оператора AB^* (см., например, [3]). Каждой паре векторов (x, y), $x\in\mathcal{H}_1$, $y\in\mathcal{H}_2$, соответствует элемент $x\otimes y$ пространства $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$, отображающий вектор $z\in\mathcal{H}_2$ в вектор $(x\otimes y)z=(z, y)x$ гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$. При этом

$$\langle x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}=\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}_1}\cdot\langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Система элементов вида $(x\otimes y)$ порождает пространство $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$.

Рассмотрим гильбертовы пространства $H(R_1)$ и $H(R_2)$ $\mathcal{H}$-значных функций, определенных на T, с воспроизводящими ядрами $R_1(s, t)$ и $R_2(s, t)$, $s, t \in T$, соответственно. Можно показать (см., например, [1]), что существует гильбертово пространство $H(R_1) \otimes H(R_2)$ $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ - значных функций $f(s, t)$ на множестве $T \times T$, порождаемое функциями

$$\varphi_{f_1, f_2}(s, t) = f_1(s) \otimes f_2(t), \quad f_1(\cdot) \in H(R_1), \quad f_2(\cdot) \in H(R_2),$$

причем

$$\langle f_1(\cdot) \otimes f_2(\cdot), \ g_1(\cdot) \otimes g_2(\cdot) \rangle_{H(R_1) \otimes H(R_2)} =$$

$$= \langle f_1(\cdot), \ g_1(\cdot) \rangle_{H(R_1)} \cdot \langle f_2(\cdot), \ g_2(\cdot) \rangle_{H(R_2)}$$

(здесь $f_1(s) \otimes f_2(t)$ означает тензорное произведение элементов $f_1(s) \in \mathcal{H}$ и $f_2(t) \in \mathcal{H}$ при фиксированных $s, t \in T$). Это пространство называется *прямым произведением* гильбертовых пространств $H(R_1)$ и $H(R_2)$. Заметим, что соответствие $(f(\cdot) \otimes g(\cdot) \leftrightarrow \varphi_{f, g}(\cdot, \cdot)$ можно продолжить до изометрического изоморфизма между гильбертовыми пространствами $H(R_1) \otimes H(R_2)$ и $H(R_1) \dot{\otimes} H(R_2)$.

Пусть $R_1(s, t)$ и $R_2(s, t)$, $s, t \in T$, — $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значные неотрицательно определенные функции, являющиеся воспроизводящими ядрами гильбертовых пространств $H(R_1)$ и $H(R_2)$, соответственно. В тензорном произведении $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ рассмотрим линейные операторы $R(s, u; t, v)$, определяемые свойством:

$$R(s, u; \ t, v) \ (x \otimes y) = R_1(s, t) x \otimes R_2(u, v) y, \quad s, u, t, v \in T, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

$R(s, u; t, v)$, (s, u), $(t, v) \in T \times T$, является $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$-значной неотрицательно определенной функцией. Функцию $R(s, u; t, v)$ назовем тензорным произведением воспроизводящих ядер $R_1(s, t)$ *и* $R_2(u, v)$ и обозначим: $R(s, u; t, v) = R_1(s, t) \otimes R_2(u, v)$. Следующая теорема обобщает результат, содержащийся в статье [2].

Теорема 2.3. $H(R_1 \otimes R_2) = H(R_1) \dot{\otimes} H(R_2)$.

Доказательство. При любых фиксированных $t, v \in T$ и

$$z = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \otimes y_j \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

имеем, что

а) функция

$$R(\cdot, \cdot; t, v) z = R(\cdot, \cdot; t, v) \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \otimes y_j \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} R_1(\cdot, t) x_i \otimes R_2(\cdot, v) y_j \in H(R_1) \dot{\otimes} H(R_2) \quad \text{и}$$

б) для любой функции

$$g(s, u) = \sum_{k,l=1}^{m} b_{kl} f_k(s) \otimes g_l(u) \in H(R_1) \dot{\otimes} H(R_2)$$

имеем:

$$\left(z,\, g(t,\,v)\right)_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} a_{ij}\bar{b}_{kl} \langle R_1(\cdot\,,t)x_i,\, f_k(\cdot)\rangle_{H(R_1)} \cdot \langle R_2(\cdot\,,v)y_j,\; g_l(\cdot)\rangle_{H(R_2)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} a_{ij}\bar{b}_{kl} \langle R_1(\cdot\,,t)x_i \otimes R_2(\cdot\,,v)y_j,\; f_k(\cdot)\otimes g_l(\cdot)\rangle_{H(R_1)\dot{\otimes}H(R_2)} =$$

$$= \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} R_1(\cdot\,,\,t)\, x_i \otimes R_2(\cdot\,,\,v) y_j \sum_{k,l=1}^{m} b_{kl} f_k(\cdot) \otimes g_l(\cdot) \right\rangle_{H(R_1)\dot{\otimes}H(R_2)} =$$

$$= \langle R(\cdot\,,\,\cdot\,;t,v)z,\; g(\cdot\,,\,\cdot)\rangle_{H(R_1)\dot{\otimes}H(R_2)}\,.$$

Справедливость свойств а) и б) для любых функций $f(s,\,u)\in H(R_1)\dot{\otimes}H(R_2)$ и для любых векторов $z\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ легко доказать путем аппроксимации функциями и векторами рассмотренного типа.

3. Разложения операторных воспроизводящих ядер

Пусть $H(R)$ — сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$-значных функций, определенных на T, с операторным воспроизводящим ядром $R(s,\,t)$, $s,\ t\in T$, и пусть $\{E(\lambda),\ \lambda\in R^1\}$ — семейство проекционных операторов в $H(R)$, образующих разложение единицы (см., например, [4]). В дальнейшем $\Delta E = E(b) - E(a)$ для любого полуоткрытого интервала $\Delta = (a,\,b]$. Следующая теорема обобщает известные результаты Н. Ароншайна [1] и Т. Хиды [5].

Теорема 3.1. *Для любых $t\in T$ и $x\in\mathcal{H}$ функция $R(\cdot\,,\,t)x\in H(R)$ может быть представлена в виде*:

$$R(\cdot\,,t)x = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x,\, F_n(t,\lambda)\right) dE(\lambda) f_n(\cdot) \qquad (1\leqslant N\leqslant\infty), \tag{3.1}$$

где $\{f_n(\cdot),\ n=1,\,2,\,\ldots,\,N\}$ — последовательность функций из $H(R)$ такая, что 1) $<\Delta_1 Ef_n(\cdot),\ \Delta_2 Ef_m(\cdot)> = 0$, *если* $n\neq m$; 2) $<\Delta_1 Ef_n(\cdot),\ \Delta_2 Ef_m(\cdot)> = 0$, *если* $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$; 3) *борелевские меры на R^1, определяемые соотношением:* $\rho_n(\Delta) = \|E(\Delta)f_n\|^2_{H(R)}$ *для любого* $\Delta=(a,\,b]$, *обладают свойством:* $\rho_{n+1}\ll\rho_n$, $1\leqslant n<N$; 4) *при любой функции $u\in H(R)$, обобщенные меры $\gamma_{n,u}(\cdot)$, определяемые соотношением:* $\gamma_{n,u}(\Delta) = \langle u,\ E(\Delta)f_n\rangle_{H(R)}$, *обладают свойством:* $\gamma_{n,u}\ll\rho_n$;

$F_n(t,\ \lambda)$ — $\mathcal{H}$-значные функции на $T\times R^1$, определяемые соотношением:

$$\left(x,\, F_n(t,\lambda)\right) = \frac{d\gamma_{n,R(\cdot,t)x}}{d\rho_n}(\lambda) \qquad (t\in T,\ \ x\in\mathcal{H}),$$

и обладающие свойством:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\left(x, F_n(t, \lambda)\right)\right|^2 \rho_n(d\lambda) < \infty$$

при любых $x \in \mathcal{H}$ *и* $t \in T$.

При этом для любого $\mu \in R^1$

$$E(\mu)\, R(\cdot, t)x = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\mu} \left(x, F_n(t, \lambda)\right) dE(\lambda)\, f_n(\cdot).$$

Это предложение легко вывести из теоремы Хеллингера – Хана (см., например, [7]).

Заметим, что формуле (3.1) можно придать следующий вид:

$$R(s, t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dE(\lambda)\, [f_n(s) \otimes F_n(t, \lambda)]\,, \tag{3.2}$$

где интеграл понимается как предел соответствующих интегральных сумм в смысле сильной сходимости операторов.

Из формулы (3.1) вытекает также следующее разложение квадратичной формы $\left(x, R(s, t)x\right)$ для любых $x \in \mathcal{H}$, s $t \in T$,

$$\left(x, R(s, t)x\right) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x, F_n(s, \lambda)\right) \left(\overline{x, F_n(t, \lambda)}\right) \rho_n(d\lambda). \tag{3.3}$$

Рассмотрим один любопытный частный случай. Пусть $T = R^1$ и $H_t(R)$ – замкнутая линейная оболочка семейства функций $\{R(\cdot, \tau)x,\ \tau \leqslant t,\ x \in H\}$; $E(t)$ – оператор проектирования в $H(R)$ на подпространство $H_t(R)$. Легко убедиться, что при условии $\bigcap_{t \in R^1} H_t(R) = \{0\}$ семейство $\{E(t),\ t \in R^1\}$ образует разложение единицы. Очевидно, если $u \in H_t(R)$, то $\gamma_{n,u}(\Delta) = 0$ при $\Delta \cap (-\infty, t] = \varnothing$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае $(x, F_n(t, \lambda)) = 0$ при $t < \lambda$. Кроме того, если $s \leqslant t$ и $u = E(s) R(\cdot, t)x$, то $\gamma_{n,u}(\Delta) = {} < u, E(\Delta) f_n >_{H(R)} = 0$ при $\Delta \cap (-\infty, s] = \varnothing$. Из теоремы 3.1 немедленно вытекает следствие.

Следствие. *Пусть* $T = R^1$ и $\{E(\lambda),\ \lambda \in R^1\}$ – *разложение единицы в* $H(R)$; *тогда*

$$R(\cdot, t)x = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} \left(x, F_n(t, \lambda)\right) dE(\lambda)\, f_n(\cdot) \qquad (1 \leqslant N \leqslant \infty)$$

и

$$E(s)\, R(\cdot, t)x = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{s} \left(x, F_n(t, \lambda)\right) dE(\lambda)\, f_n(\cdot) \qquad (1 \leqslant N \leqslant \infty).$$

4. Каноническое разложение векторнозначного случайного процесса

Следствие теоремы 3.1 допускает следующую теоретико-вероятностную интерпретацию. Пусть $\xi(t)$, $t\in T=(-\infty, +\infty)$ — случайный процесс со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем для любых $x\in\mathcal{H}$, $t\in T$ $M\left|\left(x, \xi(t)\right)\right|^2<\infty$, $M\left(x, \xi(t)\right)=0$ ($M\gamma$ означает математическое ожидание случайной величины γ). Мы предположим также, что случайный процесс $\xi(t)$ обладает $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-значной корреляционной функцией $R(s, t)$, $s, t\in T$, определяемой по формуле:

$$\left(x, R(s, t)y\right)=M\left(x, \xi(s)\right)\left(\overline{y, \xi(t)}\right), \qquad x, y\in\mathcal{H}, \quad s, t\in T.$$

Легко убедиться, что $R(s\ t), s, t\in T$ — неотрицательно определенная функция. Наконец, допустим, что при любом x из некоторого базиса в $\mathcal{H}$ случайный процесс $\gamma_x(\cdot)=\left(x, \xi(\cdot)\right)$ обладает в каждой точке пределами (в смысле сходимости в среднем квадратичном) справа и слева.

Пусть $H(\xi)$ — гильбертово пространство случайных величин со скалярным произведением $<\gamma, \eta>=M\gamma\bar{\eta}$, порожденное семейством случайных величин $\left\{\left(x, \xi(t)\right), t\in T, x\in\mathcal{H}\right\}$; $H_t(\xi)$ — подпространство в $H(\xi)$, порожденное семейством $\left\{\left(x, \xi(\tau)\right), \tau\leqslant t, x\in\mathcal{H}\right\}$. Сопоставим пространства $H(R)$ и $H(\xi)$. Существует изометрический изоморфизм между этими пространствами, при котором $R(\cdot\ , t)x\leftrightarrow\left(x, \xi(t)\right)$, и, следовательно, $H_t(R)\leftrightarrow H_t(\xi)$ при любом $t\in T$. Рассмотрим в $H(\xi)$ случайные величины $B_n(t)$, отвечающие функциям $\bar{E}(t)f_n(\cdot)$ из $H(R)$ (см. п. 3). Легко убедиться, что $MB_n(t)\equiv 0$ и $B_n(t)$ попарно ортогональные процессы с ортогональными приращениями, т. е. $MB_n(s)\overline{B_m(t)}=$ $=0$ при $n\neq m$ для любых s и t из T и $M\left(B_n(s_2)-B_n(s_1)\right)\left(\overline{B_n(t_2)-B_n(t_1)}\right)=$ $=0$, если $(s_1, s_2]\cap(t_1, t_2]=\varnothing$ и $M|B_n(t)|^2=\rho_n(t)$. Из наших предположений вытекает, что пространство $H(\xi)$, а следовательно и пространство $H(R)$, сепарабельны.

Из следствия теоремы 3.1 вытекает следующий результат, близкий к теореме Г. Каллианпура и В. Мандрекара из [6] и обобщающий теоремы Г. Крамера из [8], [9] и Т. Хиды из [5].

Теорема 4.1. *Пусть случайный процесс $\xi(t)$, $t\in T$, вполне недетерминирован, т.е. $\bigcap_{t\in T}H_t(\xi)=\{0\}$; тогда существуют $\mathcal{H}$-значные функции $F_n(t, u)$ и попарно ортогональные случайные процессы с ортогональными приращениями $B_n(t)$ такие, что*

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}F_n(t, u)\,dB_n(u).$$

При этом, если $s\leqslant t$, то проекция $\xi(t)$ на подпространство $H_s(\xi)$

$$\hat{E}_s\xi(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{s}F_n(t, u)\,dB_n(u),$$

и для любых $t \in T$ *и* $x \in \mathcal{H}$

$$M\left|\left(x, \xi(t)\right)\right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} \left|\left(x, F_n(t, u)\right)\right|^2 \rho_n(du).$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
4.II.1972

Литература

1. Н.Ароншайн, Теория воспроизводящих ядер, Математика, **7**, 2, (1963), 67–130.
2. Ю. И. Голосов, А. А. Темпельман, Об эквивалентности мер, соответствующих гауссовским векторнозначным функциям, Доклады АН СССР, **184**, 6 (1969), 1271–1274.
3. К. Морен, Методы гильбертова пространства, „Мир", Москва, 1965.
4. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, „Наука", Москва, 1966.
5. T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, ser. A,**33** (1960), 109–155.
6. G. Kallianpur, V. Mandrekar, Multiplicity and representation theory of non = deterministic stochastic processes, Теория вероят. и ее примен., **X**, 4, (1965), 614–644.
7. M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and its applications to analysis, Amer. Math. Soc. Collog. Pub. vol. **15**, New York, 1932.
8. H. Cramer, On the structure of purely non-deterministic processes, Arkiv For Math., **4**, 2–3 (1961), 249–266.
9. H. Cramer, Stochastic processes as curves in [Hilbert space, Теория вероят. и ее примен., **IX**, 2, (1964), 193–204.

HILBERTO ERDVĖS SU OPERATORINIAIS REPRODUKUOJANČIAIS BRANDUOLIAIS

E. Senkienė, A. Tempelmanas

(Reziumė)

Šiame straipsnyje nagrinėjamos pagrindinės operatorinių reprodukuojančių branduolių savybės ir kai kurie jų pritaikymai vektorinių atsitiktinių funkcijų teorijoje. Pagal duotą vieneto skleidinį gauti operatorinių reprodukuojančių branduolių skleidiniai, ir, naudojantis šiais rezultatais, rastas vektorinių atsitiktinių procesų kanoninis pavidalas.

OPERATIONAL REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACES

E. Senkienė, A. Tempelman

(Summary)

The purpose of the present paper is to investigate the fundamental properties of operational reproducing kernel Hilbert spaces and to apply them to the theory of vector random functions. According to the given resolution of the identity the representations of operational reproducing kernels are obtained. The canonical representations of vector random processes are obtained.