XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 519.2

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЕ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ НА $M[0, 1]$

Д. Г. Сургайлис

Настоящая работа является по существу продолжением работы [1], хотя речь пойдет здесь о свойствах более общих функций. Пусть G (G_0) означает множество всех монотонно возрастающих функций $g=g(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, удовлетворяющих условию $0\leqslant g\leqslant 1$ (соответственно $0<g<1$), а $M(I)$ (где $I\subset[0, 1]$ – замкнутый интервал или конечное множество) – множество всех вероятностных мер Бэра, носитель которых содержится в I, с топологией слабой сходимости мер и отношением частичного упорядочения $m_1\leqslant m_2\leftrightarrow$ $\leftrightarrow \int gdm_1\leqslant \int gdm_2$ для всех $g\in G$. Пусты $M=M([0, 1])$. Обозначим Φ класс монотонных и выпуклых функций на M, т.е. таких, что $F(m_1)\leqslant F(m_2)$ для $m_1\leqslant m_2$ и

$$\alpha F(m_1)+(1-\alpha)F(m_2)\geqslant F\Big(\alpha m_1+(1-\alpha)m_2\Big) \tag{1}$$

для всех m_1, $m_2\in M$ и $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Заметим при этом, что классу Φ принадлежит цена R_N в обобщенной задаче о „двух типах оружия" (см. [1]) (доказательство этого факта мало отличается от доказательств теорем 1 и 2 в [1]).

Функцию $F\in\Phi$ будем называть линейной на $M(I)$ (или просто на $I\subset[0, 1]$), если в соотношении (1) выполняется знак равенства для m_1, $m_2\in M(I)$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Рассуждая аналогично доказательству предложения 3 (см. ниже), можно убедиться, что справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть F линейна на I. Тогда*

$$F(m)=\int F(t^\circ)\,m(dt)$$

для $m\in M(I)$, где t° – мера, сосредоточенная на точке $t\in[0, 1]$.

Определим теперь на банаховом пространстве ограниченных бэровских функций $F=F(m)$, $m\in M$ с нормой $\|F\|=\sup\limits_{m\in M}|F(m)|$ линейный оператор $\mathcal{T}_g$, $g\in G_0$ по формуле

$$(\mathcal{T}_gF)(m)=\int gdmF(T_gm)+\int(1-g)dmF(T_{1-g}m), \tag{2}$$

где T_g – отображение $M\to M$ по формуле

$$T_gm(A)=\int\limits_A gdm\left[\int gdm\right]^{-1},\quad A\subset[0, 1].$$

Как легко видеть, оператор $\mathcal{T}_g$ ограничен и $\|\mathcal{T}_g\| \leqslant 1$. Далее,

$$\mathcal{T}_g \mathcal{T}_f = \mathcal{T}_f \mathcal{T}_g, \qquad f,\ g \in G_0. \tag{3}$$

Легко непосредственно проверить, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $F \in \Phi$. Тогда $\mathcal{T}_g F \in \Phi$ и*

$$\mathcal{T}_g F \geqslant F \qquad (\forall m). \tag{4}$$

Если же F линейна на I, то $\mathcal{T}_g F$ тоже линейна на I и

$$\mathcal{T}_g F = F, \qquad m \in M(I). \tag{5}$$

Нас в дальнейшем будет интересовать предел

$$F_\infty \equiv \lim \mathcal{T}_{g_1} \mathcal{T}_{g_2} \ldots \mathcal{T}_{g_n} F, \qquad g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n \in G_0,$$

существование которого вытекает из неравенства (4), точнее, тот случай, когда функция F_∞ линейна (см. предложение 1):

$$(F_\infty)(m) = \int F(t^\circ)\, m(dt). \tag{6}$$

Обозначим P_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ меру на пространстве J реализаций последовательности независимых случайных величин J_n, $n \geqslant 1$, принимающих значения 0 или 1, причем $g_n \in G_0$ и $P_t\{J_n = 1\} = g_n(t)$. Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть $F \in \Phi$. Для того, чтобы F_∞ была линейной, необходимо и достаточно, чтобы для любых $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, для которых F не является линейной на $[s,\ t]$, меры P_s и P_t были сингулярны.*

Замечание. Необходимым и достаточным условием сингулярности мер P_s и P_t в терминах функций g_n является, согласно известной теореме Какутани, расходимость бесконечного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(g_n(t) g_n(s)\right)^{1/2} + \left(\left(1 - g_n(t)\right)\left(1 - g_n(s)\right)\right)^{1/2} \right] = 0.$$

В случае, когда все g_n равны g, необходимым и достаточным условием, чтобы F_∞ была линейной, является возрастание g всюду, за исключением интервалов линейности F.

Доказательство теоремы значительно упрощает следующее утверждение, позволяющее свести всю задачу к рассмотрению выпуклых функций на конечномерном пространстве. Пусть $M_0 \subset M$ — множество дискретных (с конечным числом атомов) распределений.

Предложение 3. *Для того, чтобы F_∞ была линейной, достаточно, чтобы равенство* (6) *выполнялось для всех $m \in M_0$.*

Доказательство предложения. Так как $\mathcal{T}_{g_1} \ldots \mathcal{T}_{g_n} F \in \Phi$ (предложение 2), то $F_\infty \in \Phi$. Для любого $m \in M$ можно выбрать последовательности $\{m_k^-\}$ и $\{m_k^+\}$, такие, что

$$m_k^-,\ m_k^+ \in M_0,\ m_k^- \to m,\ m_k^+ \to m\ (k \to \infty) \text{ и } m_k^- \leqslant m \leqslant m_k^+,$$

после чего (6) следует из предельного перехода (так как правая часть (6) является непрерывной по m).

Пусть $T=T_N=(t_1, \ldots, t_N)$, $0\leqslant t_1<t_2< \ldots <t_N\leqslant 1$. Тогда $M_0=\bigcup_{N,\,T_N} M(T_N)$.
Между точками множества $M(T)$ и выпуклого множества $\Pi=\{p\in R^N,\ p_i\geqslant 0, \Sigma p_i=1\}$ естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие $\Pi\ni p\leftrightarrow m_p\in M(T)$:

$$m_p\left(\{t_i\}\right)=p_i, \qquad i=1, \ldots, N.$$

Функция $F(m_p)$ (в дальнейшем будем просто писать $F(p)$) является выпуклой на Π, а правую часть (6) можно записать в виде

$$\Sigma p_i F(\pi_i), \tag{7}$$

где π_i — угловые точки множества $\Pi:\pi_i=(\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$.

Пусть

$$\Omega=T\times J, \quad \mathscr{F}=\mathscr{B}(T)\times\prod_1^\infty \mathscr{B}(j_n)$$

$\Big(\mathscr{B}(A)$ — σ — алгебра, образованная всеми подмножествами конечного множества A, $(j_1, j_2, \ldots)\in J\Big)$, и P_p $(p\in\Pi)$ — мера на $(\Omega, \mathscr{F})$, такая, что

$$P_p\ (T'\times J')=\sum_{t_i\in T'} p_i P_{t_i}(J'), \qquad T'\subset T, \qquad J'\subset J.$$

Определим на $(\Omega, \mathscr{F})$ случайные величины $p=p(\omega)$ со значениями в Π, а также J_n, $n\geqslant 1$ равенством

$$p(\omega)=\pi_i, \ J_n(\omega)=j_n$$

для $\omega=(t_i, j)$, $i=1, \ldots, N$, $j=(j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots)$. Тогда, как легко видеть,

$$E_{\bar p}p=\bar p,$$

$$\mathcal{C}_{g_1} \ldots \mathcal{C}_{g_n} F(\bar p)=E_{\bar p}\Big(F\big(E_{\bar p}(p\mid J_1, \ldots, J_n)\big)\Big),$$

и достаточность условий теоремы будет следовать из их достаточности для соотношения

$$E_{\bar p} F\big(p(n)\big)\to E_{\bar p} F(p) \tag{8}$$

для любого $\bar p\in\Pi$, где $p(n)=p(\bar p, J_1, \ldots, J_n)=E_{\bar p}(p\mid J_1, \ldots, J_n)$. Заметим, что при этом можно ограничиться $\bar p\in\Pi\backslash\partial\Pi$ ($\partial\Pi$ — граница Π), т.е. таким $\bar p$, что все $\bar p_i>0$. Разобьем множество T на сумму непересекающихся T_α, где T_α состоит из тех t_i, которые входят в один интервал линейности функции F. Пусть Π_α — плоскость, проходящая через точки $\pi_i : t_i\in T_\alpha$ и p^α — проекция точки p на Π_α:

$$p_i^\alpha=\begin{cases}\dfrac{p_i}{\sum\limits_{i\in T_\alpha} p_i}, & t_i\in T_\alpha,\\[2ex] 0\quad, & t_i\bar\in T_\alpha.\end{cases}$$

Нетрудно непосредственно убедиться в справедливости следующих соотношений (см. также (5)):

$$E_{\bar p} F\Big(p^\alpha(n)\Big)\chi\{p\in\Pi_\alpha\} = E_{\bar p}^{\alpha} F\,\Big(p(n)\Big)P_{\bar p}\{p\in\Pi_\alpha\} =$$

$$= E_{\bar p\alpha} F(p) P_{\bar p}\{p\in\Pi_\alpha\} = E_{\bar p} F(p)\chi\{p\in\Pi_\alpha\}. \qquad (9)$$

Далее, согласно определению*,

$$p_k(n) = \frac{g_1(t_k)^{J_1}\Big(1-g_1(t_k)\Big)^{1-J_1}\cdots g_n(t_k)^{J_n}\Big(1-g_n(t_k)\Big)^{1-J_n}\bar p_k}{\sum\limits_j g_1(t_j)^{J_1}\Big(1-g_1(t_j)\Big)^{1-J_1}\cdots g_n(t_j)^{J_n}\Big(1-g_n(t_j)\Big)^{1-J_n}\bar p_j}$$

и

$$\rho_n(k,\ j) \equiv \frac{p_k(n)}{p_j(n)} = \frac{\bar p_k}{\bar p_j}\,\frac{dP_{t_k}}{dP_{t_j}}(J_1,\ \ldots,\ J_n).$$

Пусть α фиксировано. Тогда, если $t_k \bar\in T_\alpha$, а $t_j\in T_\alpha$, то поскольку меры P_{t_k} и P_{j_t} сингулярны, то

$$\rho_n(k,\ j)\to 0$$

$P_{\bar p}$ — почти всюду на множестве $\{\omega\colon p\in\Pi_\alpha\}$ (см. например, [2], пример 2 на стр. 309), откуда

$$|p(n)-p^\alpha(n)|\to 0$$

$P_{\bar p}$ — почти всюду на том же множестве. Теперь, учитывая, что F является равномерно непрерывной на Π (как выпуклая функция), вместе с равенством (9) получаем соотношение (8).

Доказательство необходимости. Предположим, что условия теоремы не выполнены, т.е. существуют $s<t$, такие, что F не является линейной на $[s,\ t]$, а меры P_s и P_t эквиваленты. Тогда, как легко показать (рассуждая аналогично доказательству предложения 3), существует $T=(t_1,\ \ldots,\ t_N)$, $s\leqslant t_1<t_2<\ \ldots\ <t_N\leqslant t$ такое, что функция $F(p)$, $p\in\Pi$ не является линейной и в то же время является выпуклой. Обозначим $L(F)$ выражение (7) (которое является уравнением плоскости, проходящей через значения F в угловых точках π_i множества Π). Пусть $\bar p\in\Pi\backslash\partial\Pi$. Покажем, что

$$F_\infty(\bar p) < L(F)(\bar p), \qquad (10)$$

откуда будет следовать необходимость условий теоремы. Пусть

$$\varphi_i(\omega) = \frac{dP_{t_i}}{dP_t}(\omega),\ i=1,\ \ldots,\ N$$

(существование плотностей φ_i вытекает из того, что меры P_{ti} и P_t эквивалентны, если эквивалентны P_s и P_t $(s\leqslant t_i\leqslant t)$). Путем несложных вычислений получаем, что

$$F_\infty(\bar p) = \int dP_t(\omega) F\Big(\psi(\omega)\Big)\sum_{j=1}^{N}\bar p_j\varphi_j(\omega),$$

---

* Где, напомним, $\Big(p_1(n),\ \ldots,\ p_N(n)\Big) = p(n) = E_{\bar p}(p\mid J_1,\ \ldots,\ J_n)$.

где

$$\psi=\psi(\bar{p})\in\Pi \quad \text{и} \quad \psi_i=\frac{\bar{p}_i\varphi_i}{\sum\limits_j \bar{p}_j\varphi_j}.$$

С учетом последнего выражения разность между правой и левой частями в (10) можно представить как

$$\int\limits_{\Pi}\Big(L(F)(\psi)-F(\psi)\Big)\sum_j \bar{p}_j\varphi_j\,dP_t\,.$$

Далее, $P_t\,\{\psi\in\Pi\backslash\partial\Pi\}=1$ (поскольку $P_t\,\{0<\varphi_i<\infty\}=1$). Заметим теперь, что без уменьшения общности можно считать, что $L\ (F)=F$ на границе, так что в силу выпуклости

$$L\ (F)\ (p)>F\ (p)$$

для всех $p\in\Pi\backslash\partial\Pi$, и последний интеграл оказывается положительным. Действительно, если бы $L\ (F)>F$ на некоторой плоскости из $\partial\Pi$, то можно было бы взять эту плоскость в качестве новой области Π, и, продолжая этот процесс, в конечном счете получить интервал, граница которого состоит из 2 точек. Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
30.XI.1971

Литература

1. Д. Сургайлис, О некоторых свойствах оптимальной цены в обобщенной задаче о двух типах оружия, Liet. matem. rink., XII, 3 (1972), 181.
2. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.

APIE VIENĄ RIBĄ IŠKILOMS MONOTONIŠKOMS FUNKCIJOMS, APIBRĖŽTOMS AIBĖJE M[0, 1]

D. Surgailis

(*Reziumė*)

Tegul $M[0, 1]$ yra aibė visų tikimybinių matų ant intervalo $[0, 1]$ ir Φ – aibė visų iškilų ir monotoniškų funkcijų F, apibrėžtų aibėje $M[0, 1]$. Darbe rastos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad riba

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{T}_{g_1}\mathcal{T}_{g_2}\ \cdots\ \mathcal{T}_{g_n}F$$

būtų tiesinė funkcija; čia tiesinis operatorius $\mathcal{T}_g:\Phi\to\Phi$ apibrėžtas (2) formule kiekvienai didėjančiai funkcijai $g=g(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, tokiai, kad $0<g<1$.

ON ONE LIMIT FOR CONVEX MONOTONE FUNCTIONS ON $M[0, 1]$

D. Surgailis

(Summary)

Let $M[0, 1]$ be the set of all probabilistic measures on $[0, 1]$ and Φ the set of all convex and monotone functions F on $M[0, 1]$. A linear operator $\mathcal{T}_g : \Phi \to \Phi$, where $g=g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ is increasing and $0 < g < 1$, is introduced by formula (2). The sufficient and necessary conditions on F and $g_1, g_2, \ldots,$ are found for the limit

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_{g_1}\mathcal{T}_{g_2} \cdots \mathcal{T}_{g_n}F$$

to be a linear function on $M[0, 1]$.