XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1972

УДК 513

ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОБЩЕЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

А. П. Урбонас

§ 1. Введение

Пусть L_n – пространство линейных элементов $(x^i,\ l^k)$, где опорным объектом служит вектор l^k. Аффинная связность и ковариантное дифференцирование в этом пространстве были построены Б. Л. Лаптевым [2]. Аффинная связность задается объектом [2]:

$$\left(\Gamma^i_{jk}(x,\ l),\ C^i_{jk}(x,\ l)\right), \qquad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

где Γ^i_{jk} – преобразуются по закону объекта аффинной связности и являются однородными функциями нулевого измерения относительно l^k;

C^i_{jk} – тензор, однородный, минус первого измерения относительно второй группы аргументов и удовлетворяющий условию [2]

$$C^i_{jk}l^j=0,\ C^i_{jk}l^k=0. \tag{1}$$

Движениями в пространстве опорных элементов называются точечные преобразования, сохраняющие аффинную связность. Чтобы $v^i(x)$ определяло инфинитезимальное движение, оно должно удовлетворять уравнениям [1]:

$$\begin{cases} D\Gamma^i_{jk}=0, \\ DC^i_{jk}=0, \end{cases} \tag{2}$$

где D – символ производной Ли.

Введем обозначение

$$v^i_j=v^{\cdot}{}_{,j}{}^{i}, \tag{3}$$

где запятая перед индексом означает ковариантное дифференцирование (см). [2]).

Мы будем рассматривать только случай неусеченной аффинной связности, т.е. когда $C^i_{jk}\neq 0$.

Условия интегрируемости уравнений (2) и (3) образуют систему, в которую входят [3]:

$$\begin{cases} \text{а) уравнение } DK^i_{jkl}=0, \text{ где } K^i_{jkl} \text{ – первый тензор кривизны } L_n \text{ [2];} \\ \text{б) уравнение } D(\Gamma^i_{jk\cdot s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_\beta})=0; \\ \text{в) уравнение } D(C^i_{jk,l})=0; \\ \text{г) уравнение } D(C^i_{jk\cdot l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_\lambda})=0 \end{cases} \tag{4}$$

и все полученные из них последовательным ковариантным дифференцированием по x^s под знаком D.

Здесь и в дальнейшем

$$\cdot_k = \frac{\partial}{\partial l^k}.$$

Если система (4) имеет ρ независимых уравнений, то пространство L_n допускает группу движений G_r, порядка $r = n^2 + n - \rho$. При $\rho < nP$, v^i_j можно представить (см. [5], [6]) в виде

$$v^i_j = \eta^\alpha_j \xi^i_\alpha, \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ P), \tag{5}$$

где $\eta^\alpha_i - P$ независимых ковекторов, удовлетворяющих условию:

$$\eta^\alpha_i l^i = 0. \tag{6}$$

§ 2. Необходимые условия для существования групп движений G_r, порядка $r > n^2$, $n \geqslant 4$

При рассмотрении вопроса о максимальном порядке групп движений, допускаемых пространством L_n с общей неусеченной связностью (Γ, C), основную роль в условиях интегрируемости (4) играет серия г), поскольку возможно, что в какой-то системе координат $\Gamma^i_{jk} = 0$, в то время как C^i_{jk} обязательно зависит от l^i, ибо в противном случае $C^i_{jk} = 0$, что мы исключаем.

Итак, мы имеем $\rho < n$, а значит, $P = 1$.

Уравнение $DC^i_{jk,l} = 0$ из (4) теперь запишется:

$$\eta_s \xi^i C^s_{jkl} = \eta_j \xi^s C^i_{skl} + \eta_k \xi^s C^i_{jsl} + \eta_l \xi^s C^i_{jks}, \tag{7}$$

где индекс 1 при η^1_s, ξ^s_1 и точку при $C^i_{jk.l}$, означающую дифференцирование здесь и в дальнейшем будем пропускать.

В рассматриваемой точке $(x^i,\ l^k)$ пространства L_n выберем специальную систему координат, в которой

$$l^k = \delta^k_1. \tag{8}$$

Тогда (6) дают $\eta_1 = 0$.

Ввиду произвольности и независимости η^α_i, в нашем случае, положим $\eta_s = \delta^2_s$.

Тогда из (7), имеем

$$C^2_{ijk} = 0 \qquad (i,\ j,\ k \neq 2)$$

и, ввиду произвольности η_i, можем заключить, что

$$C^a_{jkl} = 0 \qquad (a \neq 1,\ j,\ k,\ l \neq a). \tag{9}$$

Рассмотрим преобразование координат [4], где

$$A^{3'}_2 = t,\ A^3_{2'} = -t, \text{ а другие } A^i_{j'} = \delta^i_{j'},\ A^{i'}_j = \delta^{i'}_j,$$

сохраняющее (8), а, следовательно, и (9).

Из равенства

$$0 = C^{3'}_{2'4'4'} = A^{3'}_i A^j_{2'} A^k_{4'} A^l_{4'} C^i_{jkl}$$

следует

$$-t^2 C^2_{344} + t\,(C^2_{244} - C^3_{344}) + C^3_{244} = 0,$$

которое должно выполняться при любом t.

Значит, $C^2_{244} = C^3_{344}$ и, подобрав другие допустимые преобразования, получим

$$C^2_{244} = C^3_{344} = C^5_{544} = \ldots = C^n_{n44}.$$

Аналогично находим

$$C^2_{224} = C^3_{324} + C^3_{234},$$

$$C^2_{222} = C^3_{322} + C^3_{232} + C^3_{223}.$$

Введем обозначения:

$$C^2_{234} = C^5_{534} = \ldots = C^n_{n34} = A_{34},$$

$$C^2_{324} = C^5_{354} = \ldots = C^n_{3n4} = B_{34},$$

$$C^2_{342} = C^5_{345} = \ldots = C^n_{34n} = R_{34},$$

и т.д.

Тогда

$$C^2_{223} = C^4_{423} + C^4_{243} = A_{23} + B_{23},$$

$$C^2_{222} = A_{22} + B_{22} + R_{22}$$

и т.д.

Так как эти соотношения выполняются для всех C^a_{bcd} $(a, b, c, d \neq 1)$, то

$$C^a_{bcd} = \delta^a_b A_{cd} + \delta^a_c B_{bd} + \delta^a_d R_{bc}. \tag{10}$$

Берем преобразование координат, где $A^2_{1'} = t$, $A^{2'}_1 = -t$, а другие $A^i_{j'} = \delta^i_{j'}$, $A^{i'}_j = \delta^{i'}_j$, сохраняющее (8). Из

$$C^{3'}_{2'4'4'} = 0, \qquad C^{3'}_{2'2'4'} = 0, \qquad C^{3'}_{2'2'2'} = 0$$

следует

$$C^3_{144} = 0, \qquad C^3_{114} = 0, \qquad C^3_{111} = 0,$$

а из

$$C^{3'}_{2'3'3'} = C^{4'}_{2'4'3'} + C^{4'}_{2'3'4'},$$

получим

$$C^3_{133} = C^4_{143} + C^4_{143} = B_{13} + R_{13}$$

и т.д.

Равенства эти и (10) дают возможность записать C^a_{ijk} $(a \neq 1)$ в виде:

$$C^a_{ijk} = \delta^a_i A_{jk} + \delta^a_j B_{ik} + \delta^a_k R_{ij} \qquad (a \neq 1). \tag{11}$$

Определим теперь величины D_{ijk} уравнениями

$$D_{ijk} = C^1_{ijk} - \delta^1_i A_{jk} - \delta^1_j B_{ik} - \delta^1_k R_{ij}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$C^i_{jkl} = \delta^i_j A_{kl} + \delta^i_k B_{jl} + \delta^i_l R_{jk} + \delta^i_1 D_{jkl}.$$

Отсюда, учитывая тензорное строение величин, получим следующее выражение C^i_{jkl}:

$$C^i_{jkl} = \delta^i_j A_{kl} + \delta^i_k B_{jl} + \delta^i_l R_{jk} + l^i D_{jkl}. \tag{13}$$

Из (1), (13) и однородности C^i_{jk}, при $n\geqslant 4$ следует, что

$$C^i_{jk}=-\delta^i_j R_{lk} l^l-\delta^i_k R_{jl} l^l+l^i R_{jk}, \tag{14}$$

где

$$R_{kl}=\frac{1}{2-n}\left\{C^i_{kli}+\frac{1}{n(2-n)}\left[C^i_{ikl}+C^i_{lik}+(1-n)(C^i_{ilk}+C^i_{kli})\right]\right\}. \tag{15}$$

Отметим, что

$$R_{kl} l^k l^l=0. \tag{16}$$

§ 3. Существование групп движений G_r, порядка $r>n^2$, $n\geqslant 4$

Продифференцировав (14), имеем

$$C^i_{jkl}=-\delta^i_j(R_{lk}+R_{pk\cdot l} l^p)-\delta^i_k(R_{jl}+R_{jp\cdot l} l^p)+\delta^i_l R_{jk}+l^i R_{jk\cdot l}. \tag{17}$$

Уравнение $DC^i_{jkl}=0$, в силу (15) и (17), эквивалентно системе

$$\begin{cases} DR_{ij}=0, & (18)\\ DR_{ij\cdot k}=0. & (19)\end{cases}$$

Подсчитаем число независимых уравнений в (18).

Пользуясь свойствами производной Ли [1], из (18), получим

$$DS_{ij}=0, \text{ где } S_{ij}=R_{[ij]}.$$

Предположим, что $S_{ij}\neq 0$.

В рассматриваемой точке $(x^i,\ l^k)$ пространства L_n выберем систему координат, в которой*

$$l^i=\delta^i_{\alpha_1}. \tag{20}$$

Возможны два случая:

а) $S_{\alpha_1\alpha_2}\neq 0$,

б) $S_{\alpha_2\alpha_3}\neq 0$, а все компоненты вида $S_{\alpha_1\alpha_l}=0$.

Запишем $DS_{ij}=0$ в развернутом виде

$$v^k S_{ij,k}+v^s_k T^k_s(ij)=0, \tag{21}$$

где

$$T^k_s(ij)=\delta^k_i S_{sj}+\delta^k_j S_{is}-S_{ij\cdot s}\delta^k_{\alpha_1}. \tag{22}$$

В случае а) ранг (22) матрицы неменьше $2n-3$. Чтобы убедиться в этом достаточно вычислить минор порядка $2n-3$, составленный из коэффициентов при функциях $v^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_j}$ в уравнениях $(\alpha_l\alpha_2)$, $(\alpha_1\alpha_j)$, (k, $l=3, 4, \ldots, n$; i, $j=2, 3, \ldots, n$) системы (21), который с точностью до знака, равен степени составляющей $S_{\alpha_1\alpha_2}$.

В случае б) число независимых уравнений в (18) и (19) не меньше $3n-8$. В этом убеждаемся, вычисляя минор порядка $3n-8$, составленный из коэффициентов при функциях $v^{\alpha_2}_{\alpha_k}$, $v^{\alpha_3}_{\alpha_i}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_j}$ в уравнениях $(\alpha_l\alpha_3)$, $(\alpha_2\alpha_j)$, $(\alpha_2\alpha_3\alpha_k)$ (k, $l=4, 5, \ldots, n$; i, $j=3, 4, \ldots, n$) системы (18) и (19), который равен, с точностью до знака, степени компоненты $S_{\alpha_2\alpha_3}$.

---

* Через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будем обозначать подстановку $1, 2, \ldots, n$, т. е. $\alpha_i\neq\alpha_j$, если $i\neq j$.

Так как у нас $r>n^2$ и $n\geqslant 4$, то оба случая невозможны. Поэтому

$$R_{[ij]}=0.$$

Итак, R_{ij} – симметрический тензор. Тогда его можно представить в канонической форме

$R_{ij}=\varepsilon_i\delta_{ij}$, где $\varepsilon_i=\pm 1,\ 0$, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Тогда уравнения (18) можно записать в виде

$$v^i_j\varepsilon_i+v^j_i\varepsilon_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ v^k,\ v^k_pl^p). \tag{23}$$

(по $i,\ j$ – нет суммирования!).

Если ранг R_{ij} больше единицы, то среди (23) уравнений имеется не менее $2n-3$ независимых. Поэтому в нашем случае, ранг R_{ij} может быть только единицей. Представим R_{ij} в виде:

$$R_{ij}=\pm R_iR_j. \tag{24}$$

Подставляя это выражение в (18), имеем

$$(DR_i)\,R_j+R_iDR_j=0. \tag{25}$$

Умножив последнее на вектор $\mathbf{P}^i$, удовлетворяющий условию $R_i\mathbf{P}^i=1$, имеем

$$DR_i=\sigma R_i. \tag{26}$$

Подстановка этого выражения обратно в (25), дает $\sigma=0$, и

$$DR_i=0. \tag{26}$$

(16) и (24), нам дают

$$R_il^i=0. \tag{27}$$

Учитывая (27), в рассматриваемой точке $(x^i,\ l^k)$ выберем систему координат, в которой

$$l^i=\delta^i_{\alpha_1},\quad R_i=\delta^{\alpha_1}_i.$$

Уравнения (26) в этом случае дают $n-1$ независимое уравнение

$$v^{\alpha_1}_i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ v^k,\ v^k_{\alpha_1}),\qquad (i=\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n). \tag{28}$$

Таким образом, в условиях интегрируемости мы не должны получить другие уравнения, независимые от (28), иначе будет нарушено условие $r>n^2$, $n\geqslant 4$. Продифференцировав (26) частно по l^k, учитывая перестановочность дифференцирования Ли и частного [1], имеем

$$D(R_{i\cdot k})=0. \tag{29}$$

Повторив для $R_{i\cdot k}$ ту же самую аргументацию, которую мы применили к R_{ij}, получим

$$R_{i.j}=\pm C_iC_j.$$

Это и (29), в свою очередь, дают соотношения

$$DC_i=0. \tag{30}$$

Если C_i линейно-независим от R_i, мы в (30) уравнениях получим хотя бы одно уравнение, не зависящее от (28), поэтому

$$C_i=aR_i. \tag{31}$$

Теперь $R_{i\cdot k}$ можно представить в виде:

$$R_{i\cdot k} = \pm a^2 R_i R_k. \tag{32}$$

Пользуясь тем, что R_i является однородным минус первого измерения относительно l^k, имеем

$$R_{i\cdot k} l^k = -R_i. \tag{33}$$

Сопоставляя (27), (32) и (33), получим $R_i=0$, что ведет к усеченной связности, т. е. противоречит условию $C^i_{jk}\neq 0$.

Теорема. *Не существуют пространства L_n общей аффинной связности, допускающие группу движений G_r порядка r, где $r>n^2$, $n\geqslant 4$.*

Вильнюсский государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 5.I.1972

Литература

1. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорных элементов, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, МГУ, вып. 10, 1956.
2. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского университета, 118, 4 (1958), 76–147.
3. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов, Аспирантский сборник Казанского ун-та, точные науки, 1968.
4. А. П. Урбонас, Максимально подвижные пространства гиперплоскостных элементов общей аффинной связности, Liet. matem. rink., IX, № 1 (1969), 153–179.
5. Y. Muto, On a curved affinely connected space admitting a group of affine motions of, maximum order, Sci. Repr. Yokohama.Nat. Univ., 1954, Sect. 1, N3, 1–12.
6. T. Okubo, On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of path, I, II, III, Tensor, 1956, 6, N3, 141–158, 1957, 7, N1, 1–17, 18–33.

JUDESIAI TIESINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖJE SU BENDRU AFININIU SĄRYŠIU

A. Urbonas

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjami judesiai tiesinių elementų erdvėje (x^i, l^k), kurioje afininis sąryšis nusakomas objektu $(\Gamma^i_{jk}, C^i_{jk})$. Įrodyta, jog tuo atveju, kai $C^i_{jk}\neq 0$, minimoji erdvė gali turėti judesių grupę G_r su parametrų skaičiumi r, ne didesniu už n^2, $n\geqslant 4$.

LES MOUVEMENTS DANS L'ESPACE DES ÉLÉMENTS LINEAIRES

A. Urbonas

(Résumé)

On démontre, que l'espace des éléments lineaires L_n avec la connection affine commune $(\Gamma^i_{jk}, C^i_{jk})$ peut permetre le groupe des mouvements G_r, où $r\leqslant n^2$, $n\geqslant 4$. C'est a dire qu'en ce cas le groupe de mouvements ne peut contenir plus de n^2 de paramèters.