Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 432–436

Šturmo–Liuvilio uždavinys diferencialiniam operatoriui su viena dvitaške nelokialiąja antrojo tipo kraštine sąlyga

Sigita PEČIULYTĖ (VDU), Artūras ŠTIKONAS (MII)
el. paštas: s.peciulyte@if.vdu.lt, arturas.stikonas@fm.vtu.lt

1. Įvadas

Kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis yra viena iš sparčiai besivystančios diferencialinių lygčių teorijos dalių. Šio tipo uždaviniai iškyla įvairiose fizikos, biologijos, biotechnologijos ir kitose srityse. Nelokaliosios sąlygos atsiranda, kai funkcijos reikšmės kraštiniuose taškuose yra susijusios su reikšmėmis srities viduje arba kai negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte. Kadangi uždavinių su įvairaus tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis teorinis tyrimas yra aktuali problema, tai pastaruoju metu literatūroje jiems skiriama nemažai dėmesio.

Vieni pirmųjų šiuos uždavinius tyrė A.A. Samarskis ir A.V. Bitsadzė elipsinio dvimačio uždavinio atveju [1]. Daugiataškį nelokalųjį kraštinį uždavinį antros eilės paprastosioms diferencialinėms lygtims vienmačiu atveju pradėjo nagrinėti V. Iljynas ir E. Moisejevas [2]. Plačiau šis uždavinys buvo tiriamas straipsniuose [3–5].

Tikrinių reikšmių uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra glaudžiai susiję su diferencialinių lygčių kraštiniais uždaviniais [6,5,7]. Tikrinių reikšmių uždaviniai diferencialiniams operatoriams su nelokaliosiomis sąlygomis yra kur kas mažiau nagrinėti negu klasikinių kraštinių sąlygų atvejai. Šturmo–Liuvilio uždavinys su viena klasikine, o kita nelokaliąja integraline kraštine salyga buvo nagrinėjamas [8].

Šio straipsnio tikslas yra išanalizuoti tikrinių reikšmių uždavinį stacionariajam uždaviniui su viena dvitaške antrojo tipo nelokaliąja kraštine sąlyga. Šiame darbe nagrinėjami trys nelokaliųjų antro tipo kraštinių sąlygų atvejai. Mes tyrėme kaip šio uždavinio spektras priklauso nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų.

2. Šturmo–Liuvilio uždavinys su viena dvitaške nelokaliąja antrojo tipo kraštine sąlyga

Nagrinėkime Šturmo–Liuvilio uždavinį su viena klasikine kraštine sąlyga

$$-u'' = \lambda u, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

ir kita nelokaliąja antrojo tipo kraštine sąlyga

$$u'(1) = \gamma u(\xi) \quad (1 \text{ atv.}), \tag{3}$$

arba

$$u'(1) = \gamma u'(\xi) \quad (2 \text{ atv.}), \tag{4}$$

arba

$$u(1) = \gamma u'(\xi) \quad (3 \text{ atv.}) \tag{5}$$

su parametrais $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in (0, 1)$. Šiame darbe nagrinėsime realiąsias tikrines reikšmes ir tirsime, kaip nagrinėjamo uždavinio spektras priklauso nuo kraštinės sąlygos parametrų $\gamma \in \mathbb{R}$ ir ξ.

Kai $\gamma = 0$ (arba kai $\xi = 0$ (1 atv.)) nagrinėjami uždaviniai (1)–(3), (1)–(2), (4) ir (1)–(2), (5) tampa klasikiniais. Tuomet tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos nepriklauso nuo parametro ξ:

$$\lambda_k = (\pi k)^2, \quad u_k(x) = \sin(\pi k x), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (1, 3\, atv.) \tag{6}$$

$$\lambda_k = \left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)^2, \quad u_k(x) = \sin\left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (2\, atv.) \tag{7}$$

Kai $\lambda = 0$, tuomet $u(x) = cx$. Įstatę šį sprendinį į antrąją kraštinę sąlygą, gauname $c = c\gamma\xi$ (1 atv.), $c = c\gamma$ (2 atv.), $c = c\gamma$ (3 atv.).

2.1 LEMA. *Tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai*: $\gamma = \frac{1}{\xi}$ *pirmuoju atveju*; $\gamma = 1$ *antruoju ir trečiuoju atveju.*

Bendruoju atveju, kai $\lambda \neq 0$, (1) lygtį ir (2) kratinę sąlygą tenkina funkcijos $u = c\sin(qx)$, čia $\lambda = q^2$, kai $\operatorname{Re} q > 0$ arba $\operatorname{Re} q = 0$, $\operatorname{Im} q > 0$.

Kai $\lambda \neq 0$ nelokalioji kraštinė sąlyga išpildyta jeigu

$$cq\cos q = c\gamma\sin(q\xi) \quad (1 \text{ atv.}), \tag{8}$$

$$cq\cos q = c\gamma q\cos(q\xi) \quad (2 \text{ atv.}), \tag{9}$$

$$c\sin q = c\gamma q\cos(q\xi) \quad (3 \text{ atv.}), \tag{10}$$

ir netrivialus sprendinys egzistuoja, jei q yra šios lygties šaknis

$$f_0(q) := \gamma\frac{\sin(q\xi)}{q^2} - \frac{\cos q}{q} = 0 \quad (1 \text{ atv.}), \tag{11}$$

$$f_1(q) := \gamma\frac{\cos(q\xi)}{q} - \frac{\cos(q)}{q} = 0 \quad (2 \text{ atv.}), \tag{12}$$

$$f_2(q) := \gamma\frac{\cos(q\xi)}{q} - \frac{\sin(q)}{q^2} = 0 \quad (3 \text{ atv.}). \tag{13}$$

Jeigu $\sin(q\xi) = 0$ ir $\cos q = 0$ pirmuoju nelokaliosios kraštinės sąlygos atveju, $\cos(q\xi) = 0$ ir $\cos q = 0$ antruoju atveju arba $\cos(q\xi) = 0$ ir $\sin q = 0$ trečiuoju atveju, tuomet (11)–(13) lygybės teisingos su bet kuriomis parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ reikšmėmis. Šiuo atveju gauname *pastoviąsias tikrines reikšmes*, kurios nepriklauso nuo parametro γ. Jeigu parametras ξ yra irracionalusis skaičius, tokios tikrinės reikšmės neegzistuoja.

Tegul $\xi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, čia m ir n $(n > 1)$ yra teigiami sveikieji skaičiai, ir trupmena $\frac{m}{n}$ yra nesuprastinama.

2.2 LEMA. *Pastoviosios tikrinės reikšmės neegzistuoja iracionaliems ξ, o racionaliems $\xi = \frac{m}{n} \in (0,1)$, kai $\frac{m}{n}$ nesuprastinama trupmena, egzistuoja tokiais atvejais*:
1 atv.) *lyginiams m;*
2 atv.) *nelyginiams m ir n;*
3 atv.) *lyginiams n.*
Šiais atvejais tikrinės reikšmės yra lygios $\lambda_k = (n\pi(k - \frac{1}{2}))^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Realioms parametro γ reikšmėms ir $q = x,\ x > 0$ apibrėškime funkcijas

$$\gamma_+(x) = \frac{x\cos x}{\sin(x\xi)} \quad (1 \text{ atv.}), \tag{14}$$

$$\gamma_+(x) = \frac{\cos x}{\cos(x\xi)} \quad (2 \text{ atv.}), \tag{15}$$

$$\gamma_+(x) = \frac{\sin x}{x\cos(x\xi)} \quad (3 \text{ atv.}), \tag{16}$$

o neigiamas tikrines reikšmes λ atitinka $q = -ix, x < 0$:

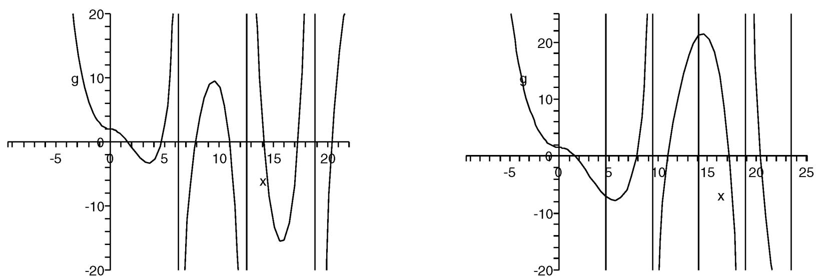
$$\gamma_-(x) = \frac{x\cosh x}{\sinh(x\xi)} \quad (1 \text{ atv.}), \tag{17}$$

$$\gamma_-(x) = \frac{\cosh x}{\cosh(x\xi)} \quad (2 \text{ atv.}), \tag{18}$$

$$\gamma_-(x) = \frac{\sinh x}{x\cosh(x\xi)} \quad (3 \text{ atv.}). \tag{19}$$

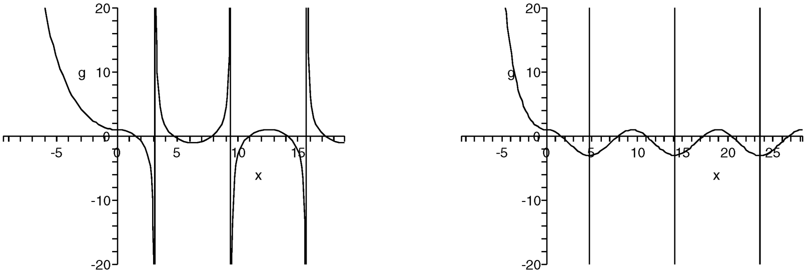
1–3 paveiksluose pateikta keletas tokių atvejų skirtingoms parametro ξ reikšmėms. Čia $\gamma = \gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$: $\gamma = \gamma_-$, kai $x \leqslant 0$, $\gamma = \gamma_+$, kai $x \geqslant 0$.

Iš šių pavyzdžių matome, kad trečiuoju atveju prie tam tikros γ reikšmės gali egzistuoti dvi neigiamos tikrinės reikšmės, tuo tarpu pirmuoju ir antruoju atvejais neigiama



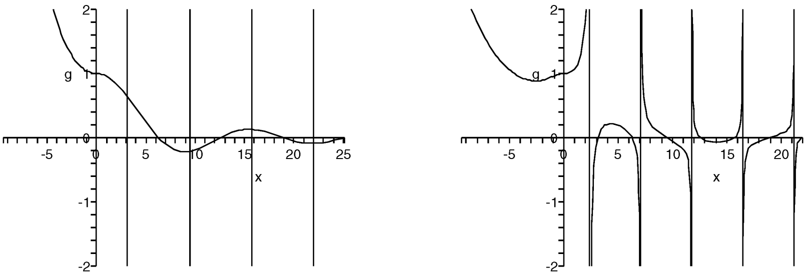
$\xi = \frac{1}{2}$. $\xi = \frac{2}{3}$.

1 pav. 1 atvejis.



$\xi = \frac{1}{2}$. $\xi = \frac{1}{3}$.

2 pav. 2 atvejis.



$\xi = \frac{1}{2}$. $\xi = \frac{2}{3}$.

3 pav. 3 atvejis.

tikrinė reikšmė visada yra vienintelė. Sekančioje lemoje suformuluotos neigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygos.

2.3 LEMA. *Kai*
1 atv.) $\gamma > \frac{1}{\xi}$,
2 atv.) $\gamma > 1$,
3 atv.) $\gamma > 1$ *ir* $\xi \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577\ldots$
egzistuoja vienintelė neigiama tikrinė reikšmė, o kai
1 atv.) $\gamma \leqslant \frac{1}{\xi}$,
2 atv.) $\gamma \leqslant 1$
3 atv.) $\gamma \leqslant 1$ *ir* $\xi \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577\ldots$
neigiamų tikrinių reikšmių nėra.

Trečiuoju nelokaliosios kraštinės sąlygos atveju, kai $\xi > \frac{1}{\sqrt{3}}$ egzistuoja dvi neigiamos tikrinės reikšmės, kai $0 < \gamma_*(\xi) < \gamma < 1$, ir kartotinė neigiama tikrinė reikšmė, kai $\gamma = \gamma_*(\xi)$. Be to, $\gamma_*(\xi) \to 0$, kai $\xi \to 1$ (monotoniškai) ir $\gamma_*(\xi)$ reikšmė gali būti surasta skaitiškai, kiekvienam $\xi \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$.

Literatūra

1. A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii, Some elementary generalization of linear elliptic boundary value problems, *Dokl. AN SSSR*, 61–77 (1999).
2. V.A. Iljyn, E.I. Moiseev, Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm–Liouville operator in its differential and finite diference aspects, *Differential Equations*, **23**(7), 803–810 (1987) (in Russian).
3. A. Boucherif, Differential equations with nonlocal boundary conditions, *Nonlinear Analysis*, **47**, 2419–2430 (2001).
4. D. Cao, R. Ma, Positive solutions to a second order multi-point boundary value problem, *Electronic Journal of Differentail Equations*, **65**, 1–8 (2000).
5. R. Ma, Positive solutions for a nonlinear three-point boundary value problem, *Electronic Journal of Differential Equations*, **34**, 1–8 (1998).
6. N.I. Ionkin, E.A. Valikova, On eigenvalues and eigenfunctions of a non-classical boundary value problem, *Math. Modelling*, **8**(1), 53–56 (1996) (in Russian).
7. G. Infante, Eigenvalues of some non-local boundary-value problems, in: *Proc. of the Edindurgh Mathematical Society*, **46** (2003).
8. R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas, On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition, *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **9**(2), 109–116 (2004).

SUMMARY

S. Pečiulytė, A. Štikonas. Sturm–Liouvile problem with two point nonlocal second type boundary condition

The Sturm–Liouvile problem with one classical boundary condition and other two point second type nonlocal boundary conditions is considered in this paper. Three cases of nonlocal conditions are investigated. There is analysed how spectrum of this problem depends on boundary condition parameters. Qualitative behavior of all eigenvalues subject to nonlocal second type boundary condition parameters is described.

Keywords: Sturm–Liouvile problem, nonlocal boundary conditions.