Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 333–337

Nelokaliųjų stacionariųjų kraštinių uždavinių Gryno funkcijos

Svetlana ROMAN, Artūras ŠTIKONAS (MII)
el. paštas: svetlana.roman@ktl.mii.lt, ash@ktl.mii.lt

Reziumė. Straipsnyje tiriamos įvairių kraštinių uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijos, lyginamos šių Gryno funkcijų savybės su klasikinių uždavinių Gryno funkcijų savybėmis. Pateikta keletas pavyzdžių.

Raktiniai žodžiai: stacionarusis uždavinys, Gryno funkcija, nelokaliosios kraštinės sąlygos.

Matematikoje Gryno funkcija naudojama nehomogeninių diferencialinių lygčių su kraštinėmis sąlygomis sprendimui. Gryno funkcija taikoma sprendžiant elektrostatikos (Puasono lygties sprendimas), kvantinės mechanikos uždavinius. Jos pagalba galima rasti stacionariųjų ir nestacionariųjų uždavinių sprendinius su skirtingomis kraštinėmis sąlygomis.

Pirmajame skyriuje nagrinėsime klasikinius stacionariuosius uždavinius ir šių uždavinių Gryno funkcijų savybes. Antrame skyriuje bus tiriamos uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijos. Pateiksime keletą pavyzdžių. Nagrinėsime Gryno funkcijų savybes.

Imkime nehomogeninę stacionariąją diferencialinę lygtį

$$Lu := -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

su įvairaus tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Nagrinėkime taškines nelokaliąsias sąlygas

$$\begin{cases} \alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \delta_0 u'(\xi_{00}) + \gamma_0 u(\xi_0), \\ \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = \delta_1 u'(\xi_{11}) + \gamma_1 u(\xi_1), \end{cases} \tag{2}$$

čia parametrai $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \delta_0,\ \delta_1,\ \gamma_0,\ \gamma_1 \in \mathbb{R}$ ir $\xi_{00},\ \xi_{11},\ \xi_0,\ \xi_1 \in [0,1]$, arba integralinio tipo nelokaliąsias sąlygas

$$u(0) = \gamma_0 \int_a^b \varrho_0(t)u(t)\,\mathrm{d}t, \quad u(1) = \gamma_1 \int_a^b \varrho_1(t)u(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

čia $\varrho_0(t)$, $\varrho_1(t)$ – svorinės funkcijos. Tokio tipo nelokaliosios sąlygos dažniausiai nagrinėjamos ir kitų autorių prie vienų ar kitų parametrų ar svorinių funkcijų reikšmių. Šio darbo tiklas buvo panagrinėti stacionariųjų klasikinių ir uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijų panašumus ir skirtumus.

1. Klasikinis stacionarusis uždavinys

Kai δ_i, γ_i, $i=0,1$ lygūs nuliui, (1),(2) arba (1),(3) uždavinys tampa klasikiniu:

$$\begin{cases} Lu = f(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1), \\ \alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = 0, \quad \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Šio uždavinio vienintelis sprendinys egzistuoja, jei $\lambda = 0$ nėra operatoriaus L tikrinė reikšmė. Tada sprendinys užrašomas integraliniu pavidalu

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

čia $G(x,s)$ – Gryno funkcija. Klasikinių Gryno funkcijų pavyzdžiai:

$$G_{\mathrm{kl1}} = \begin{cases} s(1-x), & s \leqslant x, \\ x(1-s), & x \leqslant s; \end{cases} \qquad G_{\mathrm{kl2}} = \begin{cases} 1-x, & s \leqslant x, \\ 1-s, & x \leqslant s; \end{cases} \qquad G_{\mathrm{kl3}} = \begin{cases} s, & s \leqslant x, \\ x, & x \leqslant s. \end{cases}$$

Pirmoji Gryno funkcija G_{kl1} (1a pav.) gaunama, kai kraštinės sąlygos yra $u(0) = u(1) = 0$; antroji G_{kl2} (1b pav.), kai $u'(0) = u(1) = 0$; trečioji G_{kl3} (1c pav.), kai $u(0) = u'(1) = 0$.

Klasikiniu atveju Gryno funkcija $G(x,s)$ turi šias savybes [4]:

(1) ji yra tolydi ir reali uždaroje srityje $\Omega = [0,1] \times [0,1]$;

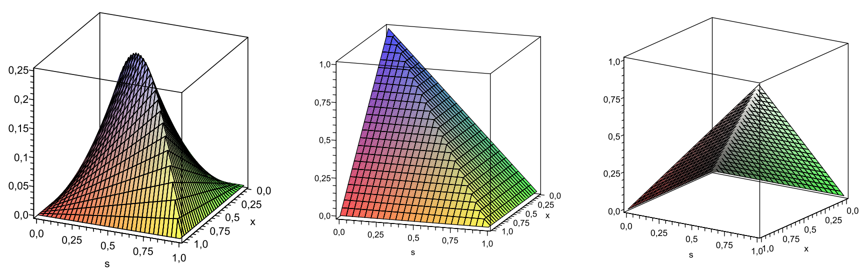
(2) ji yra simetrinė, t.y. $G(x,s) = G(s,x)$, $(x,s) \in \Omega$;

(3) diagonalėje $s = x$ išvestinės šuolis $G_x(x,s)|_{s=x-0}^{s=x+0} = \frac{1}{p(x)}$, $x \in (0,1)$;

(4) jei $x \neq s$, $LG(x,s) = 0$, $(x,s) \in \Omega$;

(5) taškuose $x = 0; 1$ patenkintos klasikinės kraštinės sąlygos:

$$\alpha_0 \frac{\partial G(0,s)}{\partial x} + \beta_0 G(0,s) = \alpha_1 \frac{\partial G(1,s)}{\partial x} + \beta_1 G(1,s) = 0, \qquad s \in [0,1].$$



a) b) c)

1 pav. Klasikinių Gryno funkcijų grafikai.

2. Stacionarusis uždavinys su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis

Nagrinėkime stacionarųjį uždavinį su nelokaliąja kraštine Samarskio ir Bicadzės sąlyga

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi). \end{cases} \tag{6}$$

Tokio tipo uždavinį kaip pavyzdį tyrinėjo tokie mokslininkai kaip Sun ir Infante [1–3]. Jie konstravo Gryno funkciją tik uždaviniams su tokiu paprastu operatoriumi $L = -u''$ ir tyrė teigiamų sprendinių egzistavimą. Sprendinys buvo randamas du kartus integruojant lygtį $-u'' = f(x)$. Šio metodo trūkumas, kad jį negalima tiesiogiai pritaikyti platesnei uždavinių klasei. Šiame straipsnyje Gryno funkcijų išraiškos gautos naudojant konstantų varijavimo metodą [4]. Šio metodo privalumas tas, kad galima sukonstruoti Gryno funkciją (1) nehomogeninei lygčiai su kintamais koeficientais $p(x)$ ir $q(x)$ ir įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Žinoma, kad (6) uždavinio Gryno funkcija egzistuoja ir yra vienintelė, kai $\gamma\xi \neq 1$. Jei $\gamma\xi = 1$, tai $\lambda = 0$ yra šio uždavinio tikrinė reikšmė ir sprendiniai neegzistuoja ar jų yra begalo daug priklausomai nuo dešiniosios lygties pusės. Šio uždavinio Gryno funkcija

$$G_1(x,s) = \frac{1}{1-\gamma\xi}x(1-s) - \begin{cases} x-s, & s \leqslant x \\ 0, & s \geqslant x \end{cases} - \begin{cases} \frac{\gamma}{1-\gamma\xi}x(\xi - s), & s \leqslant \xi \\ 0, & s \geqslant \xi. \end{cases}$$

Šiuo atveju Gryno funkciją galima išreikšti per klasikinę Gryno funkciją:

$$G_1(x,s) = G_{\mathrm{kl}1}(x,s) + \frac{\gamma x}{1-\gamma\xi}G_{\mathrm{kl}1}(\xi,s), \tag{7}$$

čia $G_{\mathrm{kl}1}$ yra klasikinė Gryno funkcija, kuri buvo apibrėžta aukščiau. Gryno funkcijų grafikai skirtingiems ξ, kai $\gamma = 2$ (a)–c) atvejai) ir $\gamma = -2$ (d)–f) atvejai) pateikti 2 pav. Formulė (7) rodo, kad šio uždavinio atveju Gryno funkcijos savybės turėtų būti panašios į klasikinės Gryno funkcijos savybes, kai $\gamma\xi \neq 1$, tačiau prarandamas simetriškumas. Taip pat atsiranda papildomi Gryno funkcijos išvestinės trūkiai tiesėje $s = \xi$ ir trūkio dydis lygus $\gamma x/(1-\gamma\xi)$, $x \neq \xi$.

Kiekvienam (1), (2) ar (1), (3) uždaviniui su įvairiais parametrais ir svorinėmis funkcijomis buvo surastos Gryno funkcijų egzistavimo sąlygos, kurios gali būti labai įvairios.

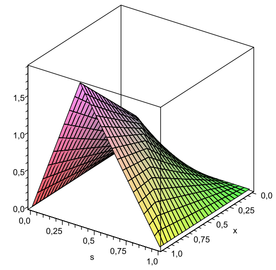
Kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \\ u'(0) = 0, \quad \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = \delta_1 u'(\xi_{11}) + \gamma_1 u(\xi_1) \end{cases} \tag{8}$$

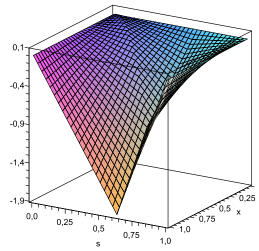
atveju, egzistavimo sąlyga yra $\beta_1 \neq \gamma_1$. Uždaviniui

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = \delta_1 u'(\xi_{11}) \end{cases} \tag{9}$$

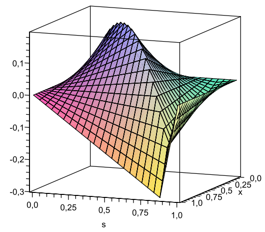
Gryno funkcija neegzistuoja, prie bet kokių δ_1 ir ξ_{11}.



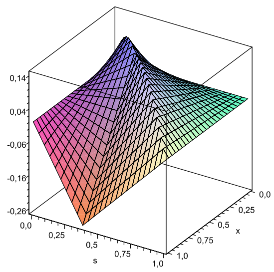
a) $\xi = 3/8$



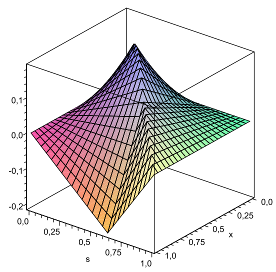
b) $\xi = 5/8$



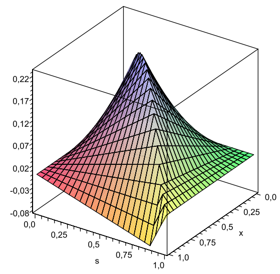
c) $\xi = 7/8$



d) $\xi = 3/8$



e) $\xi = 5/8$



f) $\xi = 7/8$

2 pav. Nelokaliojo kraštinio uždavinio (6) Gryno funkcijų grafikai su skirtingomis γ ir ξ reikšmėmis.

Nelokaliems uždaviniams Gryno funkcija gali būti trūki. Taip atsitinka tada, kai bent vienas parametrų δ_i nelygus nuliui. Šis trūkis atsiranda tiesėje $s = \xi_{ii}$. Kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u'(\xi) \end{cases} \tag{10}$$

Gryno funkcija egzistuoja, kai $\gamma \neq 1$ ir lygi

$$G(x,s) = \frac{1}{1-\gamma} x(1-s) - \begin{cases} x - s, & s \leqslant x \\ 0, & s \geqslant x \end{cases} - \begin{cases} \frac{\gamma}{1-\gamma} x, & s < \xi \\ 0, & s > \xi. \end{cases}$$

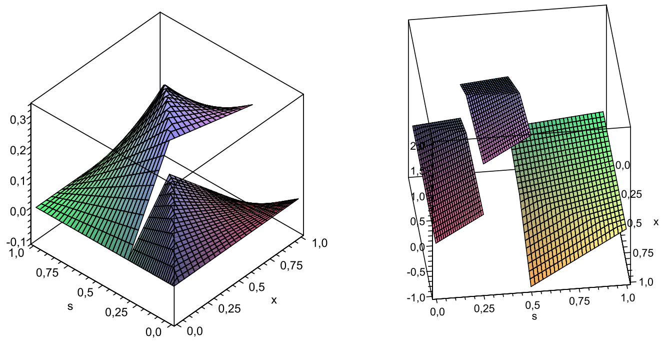
3a pav. pavaizduotas Gryno funkcijos grafikas, kai $\gamma = 1/4$ ir $\xi = 1/3$. Tiesės $s = \xi$ taškuose Gryno funkcija yra trūki.

Uždavinio

$$\begin{cases} -u'' = f, \\ u(0) = \gamma_0 u'(\xi_0), \quad u(1) = \gamma_1 u'(\xi_1) \end{cases} \tag{11}$$

Gryno funkcija egzistuoja, kai $\gamma_1 - \gamma_0 \neq 1$ ir lygi

$$G(x,s) = \frac{(x+\gamma_0)(1-s)}{1-\gamma_1+\gamma_0} - \begin{cases} x - s, & s \leqslant x \\ 0, & s \geqslant x \end{cases}$$



a) b)

3 pav. Gryno funkcijos: a) (10) kraštinio uždavinio, kai $\gamma = 1/4$, $\xi = 1/3$; b) (11) kraštinio uždavinio, kai $\gamma_0 = 1/2$, $\gamma_1 = 3$, $\xi_0 = 1/4$, $\xi_1 = 1/2$.

$$- \begin{cases} \frac{\gamma_0(1-x-\gamma_1)}{1-\gamma_1+\gamma_0}, & s < \xi_0 \\ 0, & s > \xi_0 \end{cases} - \begin{cases} \frac{(x+\gamma_0)\gamma_1}{1-\gamma_1+\gamma_0}, & s < \xi_1 \\ 0, & s > \xi_1. \end{cases}$$

Šiuo atveju gauname 2 trūkius tiesėse $s = \xi_0$ ir $s = \xi_1$, o išvestinė turi trūkį tiesės $x = s$ (žr. 3b pav.).

Pagrindinės šio straipsnio išvados:

1. Gryno funkcija nelokaliųjų kraštinių sąlygų atveju yra nesimetrinė, ji arba jos išvestinė gali turėti trūkius taškuose $x \neq s$.
2. Nagrinėtų nelokaliųjų sąlygų atveju Gryno funkciją galima išreikšti per klasikinio uždavinio Gryno funkciją ir jos išvestinę.

Literatūra

1. Y. Sun, Eigenvalues and symmetric positive solutions for a three-point boundary-value problem, *Electronic Journal of Differential Equations*, **127**, 1–7 (2005).
2. G. Infante, Eigenvalues of some non-local boundary-value problems, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **46**, 75–86 (2003).
3. G. Infante, Eigenvalues and positive solutions of odes involning integral boundary conditions, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 436–442 (2005).
4. V.S. Vladimirov, *Uravnenija Matematiceskoj Fiziki*, Nauka, Moskva (1981) (rusiškai).

SUMMARY

S. Roman, A. Štikonas. Green functions for stationary problems with nonlocal boundary conditions

In this paper the Green functions for various stationary problems with nonlocal boundary conditions are investigated. We compare Green functions properties for classical boundary conditions with properties of Green functions for problems with nonlocal boundary conditions. Few examples iliustrate such properties.

Keywords: stationary problems, Green function, nonlocal boundary conditions.