Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 655–659

Apie vieno stacionariojo uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga spektrą

Sigita PEČIULYTĖ (VDU), Olga ŠTIKONIENĖ (MII), Artūras ŠTIKONAS (MII)
el. paštas: s.peciulyte@if.vdu.lt, olgast@ktl.mii.lt, arturas.stikonas@fm.vtu.lt

1. Parabolinis uždavinys su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga

Nagrinėkime kraštinį parabolinį uždavinį su viena klasikine kraštine sąlyga ir kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \tag{3}$$

$$u(1,t) = \gamma \int_0^\xi u(x,t)\,\mathrm{d}x + d = \gamma \int_0^1 K(x,t)u(x,t)\,\mathrm{d}x + d, \tag{4}$$

čia $\xi \in [0,1]$, ir

$$K(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leqslant \xi, \\ 0, & x > \xi. \end{cases}$$

Uždaviniai su tokio tipo nelokaliosiomis sąlygomis iškyla įvairiose fizikos, mechanikos, biologijos, bioinžinerijos ir kitose srityse, kai negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte arba ieškomos funkcijos reikšmės kraštiniuose taškuose susijusios su reikšmėmis srities viduje. Uždaviniams su įvairaus tipo nelokaliosiomis salygomis pastaruoju metu literatūroje skiriama pakankamai daug dėmesio, ir šių uždavinių teorinis tyrimas yra aktualus.

Šio kraštinio parabolinio uždavinio (1)–(4) sprendinio ieškant Furjė metodu sprendžiamas Šturmo–Liuvilio uždavinys

$$-u'' = \lambda u, \tag{5}$$

$$u(0) = 0, \tag{6}$$

$$u(1) = \gamma \int_0^\xi u(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

čia $u(x)$ yra kompleksinė realaus kintamojo x funkcija, o $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$.

2. Diferencialinio uždavinio su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga spektras

Ištirsime (5)–(7) uždavinio spektro priklausomybę nuo nelokaliosios sąlygos parametro γ. Atskiri šio uždavinio atvejai, kai kraštinėje sąlygoje parametras $\xi = 1$, buvo tirti darbe [1]. Kai $\gamma = 0$, mūsų suformuluotas uždavinys tampa klasikiniu (abi sąlygos lokaliosios). Šiuo atveju tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos nepriklauso nuo kito parametro ξ:

$$\lambda_k = (\pi k)^2, \quad u_k(x) = \sin(\pi k x), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Lygiai tą patį rezultatą gauname ir kai $\xi = 0$, todėl toliau laikysime, kad $\xi \in (0, 1]$.

Bendruoju atveju, kai $\lambda \neq 0$, (5) lygtį ir (6) kraštinę sąlygą tenkina funkcijos $u = c\,\sin(\mu x)$, čia μ yra šaknis iš λ, t.y., $\mu^2 = \lambda$. Ši šaknis pilnai apibrėžta, jeigu $\operatorname{Re}\mu > 0$ arba $\operatorname{Re}\mu = 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$. Kai $\lambda = \mu = 0$, tuomet $u = cx$. Įstatę šį sprendinį į (7) nelokaliąją kraštinę sąlygą, gauname

$$c = \gamma \int_0^{\xi} cx\,\mathrm{d}x = c\gamma \frac{\xi^2}{2}.$$

2.1 LEMA. *Nulinė tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{2}{\xi^2}$.*

Kitais atvejais ($\mu \neq 0$) nelokalioji sąlyga išpildyta, jeigu

$$c\,\sin(\mu \cdot 1) = c\,\gamma \int_0^{\xi} \sin(\mu x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Tada nenulinio sprendinio egzistavimo sąlyga yra

$$\sin\mu = \gamma \frac{1 - \cos(\mu\xi)}{\mu} \equiv 2\gamma \sin^2\frac{\mu\xi}{2}/\mu, \tag{9}$$

o tikrinės reikšmės $\lambda = \mu^2$ randamos sprendžiant lygtį

$$f_0(\mu) := 2\gamma \frac{\sin^2\frac{\mu\xi}{2}}{\mu^2} - \frac{\sin\mu}{\mu} = 0. \tag{10}$$

Jeigu $\sin\mu = 0$ ir $\sin\frac{\mu\xi}{2} = 0$, tuomet (9) lygybė teisinga su bet kuriomis γ reikšmėmis. Šiuo atveju turime nepriklausančias nuo parametro ξ tikrines reikšmes $\lambda_k = \mu_k^2$. Jas vadinsime *pastoviosiomis tikrinėmis reikšmėmis*. Jeigu ξ yra iracionalusis skaičius, tuomet tokių tikrinių reikšmių nėra.

Jeigu $\xi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tuomet tokios tikrinės reikšmės egzistuoja. Apibrėžkime funkcijas $S_j(z) = \frac{\sin(jz)}{\sin z}$, $j \in \mathbb{N}$. Kai $j \geqslant 2$, jų išraiškas galime gauti iš Muavro formulės:

$$S_{2k}(z) = 2k\cos^{2k-1} z - \mathrm{C}_{2k}^3 \cos^{2k-3} z \sin^2 z + \ldots + (-1)^{k-1} 2k \cos z \sin^{2k-2} z,$$

$$S_{2k+1}(z) = (2k+1)\cos^{2k} z - \mathrm{C}_{2k+1}^3 \cos^{2k-2} z \sin^2 z + \ldots + (-1)^k \sin^{2k} z.$$

Matome, kad funkcija $S_j(z)$, $j \geqslant 2$, yra sveikoji ir jos didėjimo eilė lygi vienetui, o $S_1(z) \equiv 1$. Pastebėsime, kad $S_j = P_j(\cos z)$, čia $P_j(t)$ yra $(j-1)$-ojo laipsnio daugianaris (pakanka šių funkcijų israiškose pakeisti $\sin^2 z$ į $1 - \cos^2 z$). Funkcijos $\sin z$ ir

$S_j(z)$ bendrų nulių neturi. Sakykime, trupmena $\frac{m}{n}$ yra nesuprastinama. Tada funkcijų $\sin nz$ ir $\sin mz$ bendri nuliai yra ir funkcijos $\sin z$ nuliai. Vadinasi, funkcijos $S_n(z)$ ir $S_m(z)$ irgi neturi bendrų nulių. Skaidydami (9) lygybės abi puses dauginamaisiais, gauname:

$$\sin\frac{\mu}{n}\cdot\left[\,2\gamma S^2_{m/2}\Big(\frac{\mu}{n}\Big)\frac{\sin\frac{\mu}{n}}{\mu}-S_n\Big(\frac{\mu}{n}\Big)\right]=0,\quad \text{kai } m \text{ lyginis,} \tag{11}$$

$$\sin\frac{\mu}{2n}\cdot\left[\,2\gamma S^2_{m}\Big(\frac{\mu}{2n}\Big)\frac{\sin\frac{\mu}{2n}}{\mu}-S_{2n}\Big(\frac{\mu}{2n}\Big)\right]=0,\quad \text{kai } m \text{ nelyginis.} \tag{12}$$

2.2 LEMA. *Pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliesiems $\xi=\frac{m}{n}\in(0,1]$. Jeigu trupmena $\frac{m}{n}$ yra nesuprastinama, tuomet šios pastoviosios tikrinės reikšmės lygios $\lambda_k=(n\pi k)^2$, $k\in\mathbb{N}$, lyginiams m, $\lambda_k=(2n\pi k)^2$, $k\in\mathbb{N}$, nelyginiams m.*

Nagrinėkime tikrines reikšmes, kurios nėra pastoviosios, t.y., reiškinius, esančius (11) ir (12) formulių laužtiniuose skliaustuose, prilyginkime nuliui:

$$f_1(\mu):=2\gamma P^2_{m/2}\Big(\cos\frac{\mu}{n}\Big)\frac{\sin\frac{\mu}{n}}{\mu}-P_n\Big(\cos\frac{\mu}{n}\Big)=0,\quad \text{kai } m \text{ lyginis,} \tag{13}$$

$$f_2(\mu):=2\gamma P^2_{m}\Big(\cos\frac{\mu}{2n}\Big)\frac{\sin\frac{\mu}{2n}}{\mu}-P_{2n}\Big(\cos\frac{\mu}{2n}\Big)=0,\quad \text{kai } m \text{ nelyginis.} \tag{14}$$

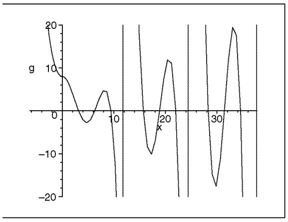
Funkcijos $f_0(\sqrt{\lambda})$, $f_1(\sqrt{\lambda})$, $f_2(\sqrt{\lambda})$ yra sveikosios funkcijos, kurių didėjimo eilė lygi $\frac{1}{2}$, todėl šios funkcijos kiekvieną savo A-reikšmę įgyja begalinį (skaitųjį) kartų skaičių, o $\lambda=\infty$ yra A-reikšmių sankaupos taškas. Atitinkamai, funkcijos $f_0(\mu)$, $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$ įgyja kiekvieną A-reikšmę begalo daugelyje taškų. Atskiru atveju, turime begalo daug šių funkcijų nulių, nepriklausomai nuo γ reikšmės.

2.3 LEMA. *Kiekvienam $\gamma\in\mathbb{C}$ ir kiekvienam $\xi\in(0,1]$ egzistuoja skaitusis skaičius nepastoviųjų tikrinių reikšmių.*

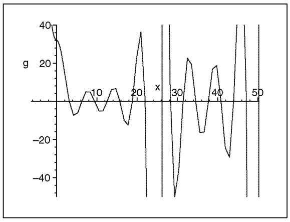
Norint rasti tas tikrines reikšmes, reikalinga rasti meromorfinės funkcijos

$$\gamma=\frac{\mu\sin\mu}{1-\cos(\mu\xi)}=\frac{\mu\sin\mu}{2\sin^2(\mu\xi/2)}=\begin{cases}\dfrac{\mu P_n(\cos(\frac{\mu}{n}))}{2\sin(\frac{\mu}{n})P^2_{\frac{m}{2}}(\cos(\frac{\mu}{n}))}, & m-\text{lyginis},\\[2ex] \dfrac{\mu P_{2n}(\cos(\frac{\mu}{2n}))}{2\sin(\frac{\mu}{2n})P^2_{m}(\cos(\frac{\mu}{2n}))}, & m-\text{nelyginis},\end{cases}$$

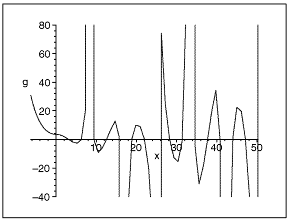
A-taškus. Jeigu ξ yra iracionalusis skaičius, tuomet $\mu_k=\pi k$, $k\in\mathbb{N}$, yra šios funkcijos nuliai, o $\mu_k=2\pi k/\xi$, $k\in\mathbb{N}$, – antrosios eilės poliai. Kai $\xi\in\mathbb{Q}$, dalis nulių „sutampa“ su poliais: taškai $\mu_k=\pi nk/m$ (m – lyginis), $\mu_k=2\pi nk/m$ (m – nelyginis), $k\in\mathbb{N}$, yra poliai, ir, kai $k=m,2m,\ldots$, šie poliai yra pirmosios eilės (kai $m=1$ ir $m=2$ antrosios eilės polių nėra). Tie taškai $\mu=\pi k$, $k\in\mathbb{N}$, kurie nėra poliai, yra funkcijos nuliai.



1 pav. $\xi = \frac{1}{2}$.



2 pav. $\xi = \frac{1}{4}$.



3 pav. $\xi = \frac{3}{4}$.

Realaus γ atvejis. Dažniausiai nelokaliosios sąlygos parametras $\gamma \in \mathbb{R}$. Teigiamas tikrines reikšmes λ atitinka $\mu = x$, $x > 0$:

$$\gamma_+ = \frac{x \sin x}{1 - \cos(x\xi)} = \frac{x \sin x}{2\sin^2 \frac{x\xi}{2}}, \tag{15}$$

o neigiamas tikrines reikšmes λ atitinka $\mu = -\mathrm{i}x$, $x < 0$:

$$\gamma_- = \frac{-\mathrm{i}x \sin(-\mathrm{i}x)}{2\sin^2\left(-\frac{\mathrm{i}x\xi}{2}\right)} = \frac{x \,\mathrm{sh}\, x}{2\mathrm{sh}^2(\frac{x}{2}\xi)} = 2\frac{\frac{x}{2}\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,(\frac{x}{2}\xi)}\right)^2. \tag{16}$$

Patogu grafiškai vaizduoti realiąją funkciją $\gamma = \gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$: $\gamma = \gamma_-$, kai $x \leqslant 0$, $\gamma = \gamma_+$, kai $x \geqslant 0$. Keletas tokių atvejų skirtingiems ξ pavaizduota 1–3 pav.

2.4 LEMA. *Kai $\gamma > \frac{2}{\xi^2}$ egzistuoja vienintelė neigiama tikrinė reikšmė, o kai $\gamma \leqslant \frac{2}{\xi^2}$ neigiamų tikrinių reikšmių nėra.*

Įrodymas. Funkcija γ_-, kai $x \in \mathbb{R}$, yra lyginė ir $\gamma_-(0) = \frac{2}{\xi^2}$, $\gamma_-(+\infty) = +\infty$. Todėl pakanka parodyti, kad ji intervale $(0, +\infty)$ yra didėjanti. Funkcija $\gamma_-(x)$ išreiškiama trijų funkcijų $y_1(x/2) \cdot y_2(x/2) \cdot y_2(x/2)$ sandauga, čia $y_1(x) = 2\frac{x\,\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$, $y_2(x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,(x\xi)}$. Kiekviena šių funkcijų yra didėjanti, nes intervale $x > 0$

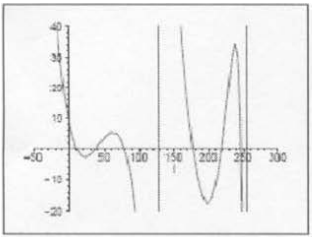
$$y_1' = \frac{\mathrm{sh}\,(2x) - 2x}{\mathrm{sh}^2 x} > 0, \quad y_2' = \frac{(\mathrm{th}\,(x\xi) - \xi\,\mathrm{th}\,x)\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,(x\xi)}{\mathrm{sh}^2(x\xi)} > 0.$$

2.5 LEMA. *Sakykime, z_0 yra teigiama lygties $z = 2\arctan(z)$ šaknis ($z_0 \approx 2{,}331122\ldots$). Jeigu $|\gamma| \leqslant \frac{3\pi}{2(1-\cos z_0)} \approx 2{,}78978\ldots$, tuomet visos tikrinės reikšmės yra teigiamos, ir ribinis atvejis realizuojamas, kai $\xi = \frac{2z_0}{3\pi} \approx 0{,}4946\ldots$.*

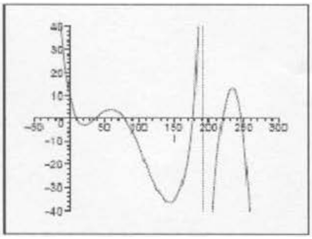
3. Diskretusis atvejis

Taip pat nagrinėsime ir diskretųjį (5)–(7) Šturmo–Liuvilio uždavinio atvejį

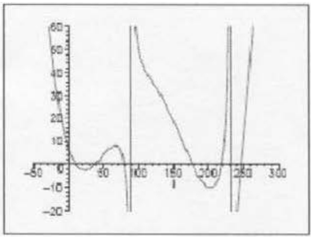
$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \lambda u_i, \tag{17}$$



4 pav. Trapecijų m.



5 pav. K. stačiakampių m.



6 pav. D. stačiakampių m.

$$u_0 = 0, \tag{18}$$

$$u_N = \gamma(u, \chi_\xi). \tag{19}$$

Tirsime tik tuos atvejus, kai parametras ξ sutampa su diskrečiojo tinklo tašku. Integralinę kraštinę sąlygą aproksimuosime trapecijų, kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių metodais:

$$(u, \chi_\xi)_T = u_1 h + u_2 h + \ldots + u_j \frac{h}{2};$$
$$(u, \chi_\xi)_{KS} = u_1 h + u_2 h + \ldots + u_{j-1} h;$$
$$(u, \chi_\xi)_{DS} = u_1 h + u_2 h + \ldots + u_j h.$$

4–6 pav. pateikti atitinkami grafikai. Šiuose grafikuose vaizdas kokybiškai skiriasi. Funkcija $\gamma = \gamma(x)$ tiksliausiai aproksimuojama trapecijų formulės atveju. Taip pat kiekviename iš šių trijų atvejų nulinė tikrinė reikšmė atsiranda prie skirtingų parametro γ reikšmių.

Literatūra

1. R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas, On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition, *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **9**(2), 109–116 (2004).

SUMMARY

S. Pečiulytė, O. Štikonienė, A. Štikonas. On the spectrum of one stationary problem with nonlocal integral type boundary condition

We investigated a eigenvalue problem for simple second order ordinary differential equation with one integral type nonlocal boundary condition. The eigenvalues and eigenfunctions of such problem are depending on few parameters in the nonlocal boundary conditions. For some values of those parameters all eigenvalues are positive. We find conditions when there is one zero or one negative eigenvalue. We investigate similar discrete problem too.

Keywords: nonlocal boundary condition, eigenvalue problem.