Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 665–669

Čebyševo iteracinis metodas uždaviniui su nelokaliąja kraštine sąlyga

Mifodijus SAPAGOVAS, Artūras ŠTIKONAS, Olga ŠTIKONIENĖ (MII)
el. paštas: m.sapagovas@ktl.mii.ltash@fm.vtu.lt, olgast@ktl.mii.lt

Reziumė. Darbe analizuojamas Čebyševo metodo taikymas nesimetriniai tiesinių lygčių sistemai, gautai sprendžiant baigtinių skirtumų metodu elipsinį kraštinį uždavinį su nelokaliąja kraštine sąlyga.

1. Uždavinio formulavimas

Dvimatis uždavinis. Stačiakampėje dvimatėje srityje $D=\{0<x<1,\ 0<y<1\}$ nagrinėkime Puasono lygtį

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

su Dirichlė tipo kraštinėmis sąlygomis

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\ \ u(x,0)=\psi_0(x),\ \ u(x,1)=\psi_1(x),$$

ir viena nelokaliąja kraštine sąlyga

$$u(1,y)=\gamma u(\xi,y)+\varphi_1(y),\quad 0\leqslant\xi\leqslant 1,$$

kuri susieja ieškomos funkcijos $u(x,y)$ reikšmes stačiakampio kraštinėje ($x=1$) su funkcijos reikšmėmis srities viduje ($x=\xi$). Parametras γ kiekybiškai parodo nelokaliosios sąlygos įtaka uždaviniui. Kai $\gamma=0$, turime klasikinį uždavinį su Dirichlė tipo kraštinėmis sąlygomis.

Uždaroje srityje $\bar{D}=[0,1]\times[0,1]$ apibrėžkime tinklą (x_i,y_j), $x_i=ih_x$, $i=0,\cdots,N_x$, $N_xh_x=1$, $y_j=jh_y$, $j=0,\cdots,N_y$, $N_yh_y=1$. Laikysime, kad $x=\xi$ sutampa su tinklo tašku x_s, t.y. $\xi=sh_x$.

Tada suformuluotam diferencialiniam uždaviniui srityje $\bar{D}=[0,1]\times[0,1]$ galime užrašyti baigtinių skirtumų schemą

$$-\frac{U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{h_x^2}-\frac{U_{i,j-1}-2U_{i,j}+U_{i,j+1}}{h_y^2}=F_{ij},$$

$$U_{0,j}=\varphi_0(y_j),\ \ U_{i,0}=\psi_0(x_i),\ \ U_{i,N}=\psi_1(x_i),$$

su nelokaliąja kraštine sąlyga

$$U_{N,j}=\gamma U_{s,j}+\varphi_1(y_j),\quad j=1,\cdots,N_y-1.$$

Vienmatis (stacionarusis) uždavinys. Norėdami geriau suprasti dvimačio uždavinio ypatumus, pirmiausia ištirkime vienmatį šio uždavinio analogą intervale $(0,1)$:

$$-u'' = f(x),$$
$$u(0) = \varphi_0, \quad u(1) = \gamma u(\xi) + \varphi_1.$$

Imdami vienmatį tinklą $x_i = ih,\ i = 0, \ldots, N,\ Nh = 1$, apibrėžiame baigtinių skirtumų schemą

$$-\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = F_i,$$
$$U_0 = \varphi_0, \quad U_N = \gamma U_s + \varphi_1.$$

Nagrinėjamu atveju $\xi = x_s = sh$.

Baigtinių skirtumų metodas suveda diferencialinį uždavinį į tiesinių lygčių sistemą (TLS), kurios sprendimui pasirenkamas Čebyševo metodas. Jis yra vienas iš greičiausių iteracinių sprendimo metodų simetrinių sistemų atveju. Šio metodo parametrai parenkami atsižvelgiant į sistemos matricos spektrą.

2. Tikrinės reikšmės ir nesimetrinės matricos

Vienmatis atvejis. Vienmačio uždavinio spektras randamas, sprendžiant Šturmo–Liuvilio uždavinį su nelokalia kraštine sąlyga

$$-\frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} = \lambda V_i, \tag{1}$$
$$V_0 = 0, \quad V_N = \gamma V_s. \tag{2}$$

Pirmąją (Dirichlė tipo) kraštinę sąlygą tenkina sprendiniai

$$V_i = C\sin(i\varphi), \quad i = 1, \ldots, N-1,\ \varphi = \mathrm{i}\ln\left(1 - \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \mu}\right),\ \mu = \lambda h^2,\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Įstatykime šiuos sprendinius į antrąją (nelokaliąją) kraštinę sąlygą. Tada

$$\sin(N\varphi) = \gamma\sin(s\varphi) \Rightarrow \gamma = \frac{\sin a}{\sin(\xi a)}, \quad a = N\varphi = \frac{\varphi}{h}.$$

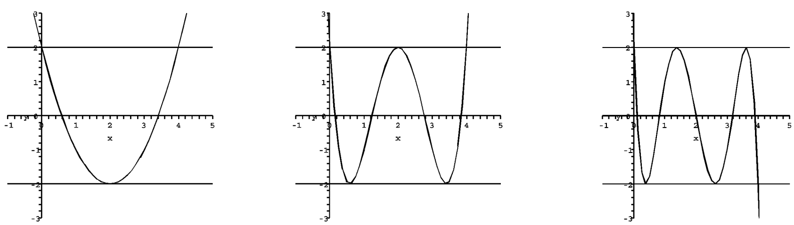
Šio diskrečiojo uždavinio spektras sudarytas iš $(N-1)$-os tikrinės reikšmės. Dalis tikrinių reikšmių nepriklauso nuo γ ir randama sprendžiant lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin(N\varphi) = 0, \\ \sin(s\varphi) = 0. \end{cases}$$

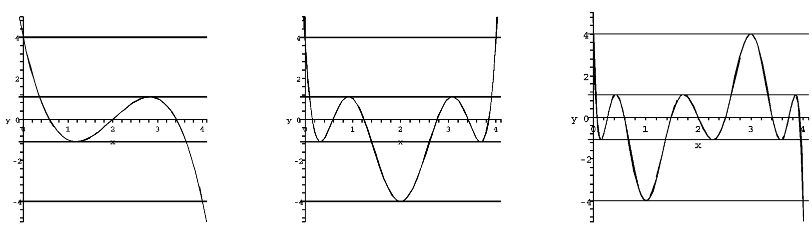
Kita dalis tikrinių reikšmių priklauso nuo parametro γ ir atitinka funkcijos $\gamma = \gamma(a)$ lygio taškus.

Uždavinio su nelokaliąja kraštine sąlyga spektras gali stipriai skirtis nuo klasikinio uždavinio spektro. Kaip iliustraciją paimkime pavyzdį, kai parametras $\xi = \frac{1}{4}$, arba $\xi = \frac{1}{2}$. Nagrinėkime tikrines reikšmes priklausančias nuo γ. Vienmačio uždavinio spektras priklauso nuo γ, ξ ir nuo TLS dimencijos N (žr. 1 pav. Brėžiniuose pavaizduoti funkcijos $\gamma = \gamma(a)$ grafikai įvairiais atvejais. Kai parametras $\gamma = 0$, funkcijos $\gamma = \gamma(\xi, a)$ šaknys yra klasikinio uždavinio tikrinės reikšmės. Nelokaliosios sąlygos atveju ($\gamma \neq 0$) tikrinės reikšmės gaunamos kertant horizontalia tiese funkcijos $\gamma = \gamma(\xi, a)$ grafiką. Kai $\xi = \frac{1}{2}$ intervale $-2 \leqslant \gamma < 2$ visos tikrinės reikšmės yra teigiamos. Kai $\gamma > 2$, viena tikrinė reikšmė yra neigiama, gali egzistuoti viena teigiama reikšmė ($N = 4, 8, 12, \ldots$), ir egzistuoja kompleksinės tikrinės reikšmės ($N = 6, 8, 10, \ldots$); kai $\gamma < -2$ tikrinės reikšmės yra kompleksinės ir gali egzistuoti viena teigiama tikrinė reikšmė ($N = 2, 6, 10, \ldots$). Kai $\gamma = -2$ arba $\gamma = 2$ egzistuoja kartotinės tikrinės reikšmės. Pastebėsime, kad pastovios tikrinės reikšmės (nepriklausančios nuo γ) sutampa su taškais, kuriuose grafikai $\gamma = \gamma(a)$ liečia tieses $\gamma = \pm 1/\xi$. Kai $\xi = \frac{1}{4}$, įvairios situacijos pavaizduotos 1 pav.). Kartotinių tikrinių reikšmių atveju sistemos matrica neturi paprastos struktūros, taigi tikrinių vektorių sistema nėra pilna ir egzistuoja prijungtiniai vektoriai.

Dvimatis atvejis. Šiuo atveju sritis D yra stačiakampis, kiekviena tikrinė reikšmė λ yra dviejų komponenčių suma $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$. Tikrinės reikšmės $\lambda_{y_k} = \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N_y}$, $k = 1, \ldots, N_y - 1$, nes y kryptimi uždavinys yra klasikinis. Norint geometriškai rasti visas tikrines reikšmes vietoje vieno grafiko vienmačiu atveju reikia braižyti keletą tokių



$\xi = \frac{1}{2} : N = 4,$ $N = 8,$ $N = 10;$



$\xi = \frac{1}{4} : N = 4,$ $N = 8,$ $N = 10.$

1 pav. Funkcijos $\gamma = \gamma(a)$ grafikai.

grafikų. Jų skaičius yra lygus $N_y - 1$, t.y. tinklo vidinių taškų y kryptimi skaičiui (žr. 2 pav.).

Kiek vienmačiu, tiek dvimačiu atveju, galimos γ ir ξ reikšmės, kada maksimali tikrinė reikšmė gali būti kartotinė. Šiuo atveju, kartotinumas priklauso nuo diskretizacijos taškų skaičiaus (žr. 1, 2 pav. $\gamma = \pm 2$, $\xi = 1/2$ arba $\gamma \approx \pm 1$, $\xi = 1/4$).

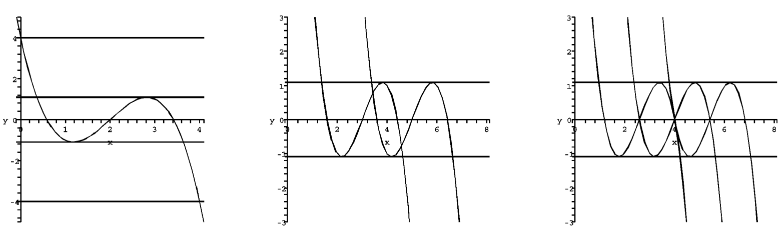
Nesimetrinės matricos. Uždavinio su nelokaliąja kraštine sąlyga sistemos matrica yra nesimetrinė. Vienmačiam uždaviniui tai yra triįstrižainė matrica su ardančiu simetriškumą parametru γ paskutinėje eilutėje. Dvimačio uždavinio matrica turi blokinę struktūrą, parametras γ įeina į pagrindinės įstrižainės blokus. Pateiksime tokių matricų pavyzdžius vienmačiu atveju, kai $\xi = \frac{1}{4}$, $N = 8$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ir dvimačiu, kai $\xi = \frac{1}{4}$, $N_x = 4$, $N_y = 4$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\gamma & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\gamma & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Matome, kad diferencialiniai uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinemis sąlygomis gali generuoti nesimetrinę matricą, turinčią pakankamai paprastą nesimetrinę struktūrą.



$N_x = 4, N_y = 2$ $N_x = 4, N_y = 3$ $N_x = 4, N_y = 4$

2 pav. Funkcijos $\gamma = \gamma(a)$ grafikai dvimačiu atveju, kai $\xi = \frac{1}{2}$.

Keičiant jų parametrus galima tiksliai nustatyti įvairius tikrinių reikšmių pasiskirstimo atvejus ir panaudoti tą informaciją iteraciniuose metoduose.

3. Čebyševo iteracinis metodas

Diskretusis uždavinys užrašomas kaip tiesinių lygčių sistema $AU = F$ su nesimetrine matrica A, $A \in L(\mathbb{R}^m)$, $m = (N_x - 1)(N_y - 1)$ dvimačiu atveju, $m = N - 1$ vienmačiu atveju.

Sprendžiant šią TLS, buvo taikomos Čebyševo iteracijos $U^{k+1} = U^k - \tau_{k+1}(AU^k - F)$, čia $\tau_k = 2/(\beta + \alpha + (\beta - \alpha)t_k)$, $t_k = \cos\big((2k-1)\pi/(2n)\big)$, $k = 1, \ldots, n$.

Jei matrica yra simetrinė, teigiamai apibrėžta, ir jos tikrinės reikšmės priklauso intervalui $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, tai Čebyševo iteracinis metodas yra optimalus tarp visų polinominių metodų [**1**]. Jo paklaida yra $\|U^n - u^*\| \leqslant q_n \|U^0 - u^*\|$, čia u^* yra tikslus sprendinys ir $q_n = 2\rho^n/(1 + \rho^{2n})$, $\rho = (1 - \sqrt{\delta})/(1 + \sqrt{\delta})$, $\delta = \alpha/\beta$. Tegul $0 < \lambda_i < \lambda_{max} = q$, ir $\eta = q - \max_{\lambda_i < q} \lambda_i$. Jeigu matricos $\eta^{-1}A$ Žordano matrica yra $D^{-1}(\eta^{-1}A)D = \eta^{-1} diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + H$, tuomet įveskime normą $\|B\|_0 = \|D^{-1}BD\|_\infty$. Darbe [**2**] įrodyta teorema:

Teorema. *Tegul visos matricos A tikrinės reikšmės tenkina sąlygą* $0 < \alpha < \lambda_i < \beta$ *ir* λ_{max} *yra paprasta (nekartotinė). Tada Čebyševo iteracinis metodas konverguoja į sprendinį, kai* $n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\delta}}$, *ir teisingas paklaidos įvertis*

$$\frac{|U^n - u^*\|_0}{\|U^0 - u^*\|_0} \leq \varepsilon.$$

Skaitinis eksperimentas rodo, kad diskrečiųjų taškų skaičius įtakoja konvergavimo greitį. Jei didžiausia tikrinė reikšmė yra nekartotinė, iteracinis prosesas greičiau konverguoja į tikslųjį sprendinį, negu tuo atveju, kai ji yra kartotinė. Tai reiškia, kad tinklo taškų skaičių N reikia parinkti atsižvelgiant į maksimalios tikrinės reikšmės kartotinumą.

Literatūra

1. M.P. Sapagovas, The eigenvalues of some problem with a nonlocal condition, *Diff. Equations*, **38**(7), 1020–1026 (2002) (in Russian).
2. L. Hageman, D. Young, *Applied Iterative Method*, Academic Press (1981).

SUMMARY

M. Sapagovas, O. Štikonienė, A. Štikonas. Chebyshev iteration for the problem with nonlocal boundary condition

We considered Poisson differential equation with Dirichlet boundary conditions and one nonlocal boundary condition. Finite-difference scheme was investigated for this problem. The eigenvalues of such problem depend on few parameters in the nonlocal boundary condition. The convergence rate for Chebyshev iterations depends on the number of the discrete mesh points. The convergence is more faster when the maximal eigenvalue of the corresponding nonsimmetric matrix is simple.

Keywords: Poisson differential equation, nonlocal boundary condition, finite difference scheme, Chebyshev iteration.