Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
52 tomas, 2011, 28–33
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Stacionarus Navjė–Stokso uždavinys su nehomogenine kraštine sąlyga neaprėžtoje srityje*

Kristina Kaulakytė

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-01513, Vilnius
E. paštas: kaulakyte.kristina@gmail.com

Santrauka. Darbe nagrinėjamas stacionarus Navjė–Stokso uždavinys su nehomogenine kraštine sąlyga neaprėžtoje srityje. Sukonstruotas kraštinių duomenų pratęsimas į visą sritį, kuris tenkina vadinamąją Lerė nelygybę. Tokio pratęsimo sukonstravimas leidžia nehomogeninį uždavinį suvesti į jau išnagrinėtą uždavinį su nuline kraštine sąlyga.

Raktiniai žodžiai: Navjė–Stokso sistema, Lerė nelygybė, neaprėžta sritis.

1 Įvadas

Šiame straipsnyje nagrinėjama stacionari Navjė–Stokso sistema

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \end{cases} \tag{1}$$

neaprėžtoje srityje (žr. 2 sk.). Čia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ – greičio vektorius, $p = p(x)$ – slėgis, ν – klampumo koeficientas, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ – išorinių jėgų tankis, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ – kraštiniai duomenys.

Aprėžtoje nevienjungėje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ su Lipšico kraštu $\partial\Omega$, susidedančiu iš N nesikertančių komponenčių Γ_j, pirmą kartą (1) uždavinį nagrinėjo J. Lerė [4]. Iš tolydumo lygties $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ išplaukia, kad kraštinė funkcija $\mathbf{a}$ turi tenkinti būtinąją išsprendžiamumo sąlygą:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0, \tag{2}$$

čia $\mathbf{n}$ – vienetinis išorinės normalės vektorius.

Tačiau (1) uždavinio išsprendžiamumas buvo įrodytas [4], kai patenkinta sąlyga:

$$F_j = \int_{\Gamma_j} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{3}$$

* Tyrimą finansuoja Lietuvos mokslo taryba (sutarties Nr. MIP-030/2011).

Todėl 1933 m. J. Lerė [4] suformulavo klausimą, ar (1) uždavinys yra išsprendžiamas, kai tenkinama tik (2) sąlyga. Bendru atveju ši vadinamoji *Lerė problema* yra neišspręsta.

Yra du būdai, kaip įrodyti (1) uždavinio išsprendžiamumą. Abiem atvejais reikia (1) uždavinį suvesti į operatorinę lygtį su kompaktišku operatoriumi. Tuomet nejudamo taško egzistavimas įrodomas remiantis Lerė–Šauderio teorema. Pagrindinis skirtumas yra apriorinių įverčių gavime. Pirmuoju metodu apriorinis įvertis gaunamas prieštaros būdu, o antruoju – sukonstruojamas kraštinių duomenų $\mathbf{a}$ pratęsimas $\mathbf{A}(\varepsilon, x)$, kuris tenkina Lerė nelygybę

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{A}\cdot u\,dx\right| \leqslant \varepsilon c\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx, \quad \forall\mathbf{u}\in \mathring{W}_2^1(\Omega), \tag{4}$$

su konstanta c nepriklausančia nuo ε. Bendru atveju aprėžtoje srityje yra žinomas srities ir kraštinės funkcijos kontrpavyzdys [12], kuriam toks pratęsimas neįmanomas. Tačiau simetriniu atveju tokį pratęsimą sukonstruoti galima [8].

Neaprėžtose srityse plačiai išnagrinėtas (1) uždavinys su nuline kraštine sąlyga [9, 2]. Tačiau kai kraštinė sąlyga yra nehomogeninė, (1), (2) uždavinio išsprendžiamumas bendru atveju nėra įrodytas. Bet daugeliu atveju atskiriems sričių ir kraštinių sąlygų tipams galima sukonstruoti tokį pratęsimą $\mathbf{A}$, kuris tenkina Lerė nelygybę. 1999 m. K. Pileckas ir S.A. Nazarov [6] išsprendė (1), (2) uždavinį sluoksnyje, kai srautas per išorinį paviršių kiek norima didelis. 2002 m. H. Morimoto ir H. Fujita [5] įrodė (1), (2) uždavinio išsprendžiamumą dvimačio begalinio simetrinio kanalo atveju. 2010 m. J. Neustupa [7] nagrinėjo (1), (2) uždavinį begalinėse srityse, kai sprendinio Dirichlė integralas yra baigtinis, kraštinės funkcijos srautai per išorinius paviršius yra bet kokie, o per vidinius – „maži". Minėtas uždavinys išspręstas, įvertį gaunant prieštaros būdu.

Šio straipsnio tikslas yra išnagrinėti (1), (2) uždavinį trimatėje begalinėje srityje, kai sprendinio Dirichlė integralas yra begalinis, be prielaidų apie simetriją ir esant bet kokiems srautams per išorinį paviršių, o per vidinį paviršių imant nulinį srautą. Tam tikslui reikia suvesti nehomogeninį uždavinį į homogeninį, sukontruojant tinkamą kraštinių duomenų pratęsimą. Analogiškas uždavinys dvimačiu atveju buvo nagrinėtas R. Jodelio [1] magistriniame darbe 2001 m.

2 Uždavinio formulavimas

Tegu $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – sritis su vienu išėjimu į begalybę, kuris turi tokį pavidalą: $D=\{x=(x', x_3)\in\Omega\colon |x'|<1,\ x_3>1\}$, t.y. $\Omega=\Omega_{R_0}\cup D$, kur $\Omega_{R_0}=\Omega\cap C(0,R_0)$, $C(0,R_0)$ – rutulys su spinduliu $R_0>0$. Čia $\Omega_{R_0}=\Omega_0\setminus\overline{B}$, kur $B\subset\Omega_0$ – aprėžta sritis, o Ω_0 – vienjungė aprėžta sritis. Pažymėkime $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$, kur $\Gamma_0=\partial B$.

Tarkime, kad $\operatorname{supp}\mathbf{a}\subset\partial\Omega\cap C(0,R_1)$, kur $R_1>R_0$. Iš lygybės $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ išplaukia, kad nagrinėjamu atveju turi būti patenkintos tokios sąlygos

$$\int_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS=F_1\neq 0, \qquad \int_{\Gamma_0}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS=0, \qquad \int_\Sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS=-F_1\neq 0,$$

čia $\Sigma=\{x\colon x_3=t\}$ – išėjimo į begalybę D skerspjūvis, $\sigma=\Gamma_1\cap C(0,R_1)$.

3 Pratęsimo konstravimas ir uždavinio suvedimas į homogeninį

Tegu γ – begalinis glodus kontūras, kertantis $\partial\Omega$ taške $x^{(1)} \in \sigma$. Kontūrą γ sudaro išėjimo į begalybę D ašis $\{x\colon (x_1, x_2) = 0,\ x_3 > 1\}$, pusiau begalinė tiesė $l \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ ir baigtinė kreivė $\tilde{\gamma}$, jungianti ašį ir tiesę l. Pažymėkime $\Delta_S(x)$ ir $\delta_\gamma(x)$ reguliarizuotus atstumus nuo taško $x \in \Omega$ iki paviršiaus $S = \partial\Omega \setminus \sigma$ ir iki kontūro γ, atitinkamai. Priminsime, kad reguliarizuotas atstumas Δ_G nuo taško x iki uždaros aibės $G \subset R^n$ yra be galo diferencijuojama aibėje $R^n \setminus G$ funkcija, kuri tenkina nelygybes

$$a_1 d_G(x) \leqslant \Delta_G(x) \leqslant a_2 d_G(x), \qquad \left|D^\alpha \Delta_G(x)\right| \leqslant a_3 d_G^{1-|\alpha|}(x), \tag{5}$$

čia $d_G = \operatorname{dist}(x, G)$ – tikrasis atstumas nuo x iki G, teigiamos konstantos a_1, a_2 priklauso nuo n, o a_3 priklauso nuo n ir nuo diferencijavimo eilės $|\alpha|$ (žr. [11]).

Tegu $\xi^{(1)}(x,\varepsilon)$ – nupjautinė Hopfo funkcija, apibrėžta formule

$$\xi^{(1)}(x,\varepsilon) = \Psi\left(\varepsilon \ln \frac{\rho(\delta_\gamma(x))}{\Delta_S(x)}\right), \tag{6}$$

čia $\varepsilon \in (0,1)$, Ψ ir ρ yra tolydžios monotoninės funkcijos:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leqslant 0, \\ 1, & \text{for } t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \rho(t) = \begin{cases} \frac{a_1 d_0}{2}, & \text{for } t \leqslant \frac{a_2 d_0}{2}, \\ t, & \text{for } t \leqslant a_2 d_0, \end{cases}$$

d_0 – mažas teigiamas skaičius.

1 lema. *Funkcija $\xi^{(1)}(x,\varepsilon) = 0$, kai $\rho(\delta_\gamma(x)) \leqslant \Delta_S(x)$. Kreivės γ $d_0/2$ – aplinka prilauso šiai aibei. Kai $\Delta_S(x) \leqslant e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\rho(\delta_\gamma(x))$, tai $\xi^{(1)}(x,\varepsilon) = 1$. Be to,*

$$\left|\frac{\partial \xi^{(1)}(x,\varepsilon)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c\varepsilon}{d_S(x)}.$$

Įrodymas išplaukia iš $\xi^{(1)}$ konstrukcijos ir reguliarizuoto atstumo savybių.

Srityje Ω įvedame vektorinį lauką

$$\mathbf{A}^{(1)}(x) = \operatorname{rot}\left(\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\cdot \mathbf{b}(x)\right) = \nabla \xi^{(1)}(x,\varepsilon) \times \mathbf{b}(x), \tag{7}$$

čia $\mathbf{b}'(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|x-y|^3} \times d\mathbf{l}$, $\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}'(x)|_\Omega$.

2 lema. *Vektorius $\mathbf{b}(x)$ yra solenoidinis* (*t.y* $\operatorname{div}\mathbf{b}(x) = 0$), $\operatorname{rot}\mathbf{b}(x) = 0$ *ir vektoriaus $\mathbf{b}(x)$ cirkuliacija per bet kokį uždarą kontūrą, apimantį kreivę γ, yra lygi -1* (*jei integravimo kryptys nusakomos dešinės rankos taisykle*). *Jei šis kontūras neapima γ, tai $\mathbf{b}(x)$ cirkuliacija per jį lygi nuliui. Be to,*

$$\left|D_x^\alpha \mathbf{b}(x)\right| \leqslant \frac{c(\alpha)}{d_\gamma^{1+|\alpha|}(x)}, \tag{8}$$

Lemos įrodymą galima rasti [10].

3 lema. *Funkcija* $\mathbf{A}^{(1)}$ *yra be galo diferencijuojama, solenoidinė, lygi nuliui paviršiaus* S *mažoje aplinkoje ir aibės* $\gamma \cap \overline{\Omega}$ $d_0/2$*-aplinkoje. Be to,*

$$\left|\mathbf{A}^{(1)}(x)\right| \leqslant \frac{c\varepsilon}{d_S(x)}, \qquad \left|\nabla \mathbf{A}^{(1)}(x)\right| \leqslant c\left(\frac{1}{d_S^2(x)\cdot d_\gamma(x)} + \frac{1}{d_S(x)\cdot d_\gamma^2(x)}\right), \tag{9}$$

$$\int_\sigma \mathbf{A}^{(1)}\, dS = 1. \tag{10}$$

Įrodymas. Pirmosios lemos dalies įrodymas išplaukia iš prieš tai suformuluotų lemų. Todėl lieka įrodyti (9) ir (10). Turime

$$\left|\mathbf{A}^{(1)}(x)\right| = \left|\nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\times \mathbf{b}(x)\right| \leqslant \left|\nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\right|\cdot\left|\mathbf{b}(x)\right| \leqslant \frac{c\varepsilon}{d_S(x)\cdot d_\gamma(x)} \leqslant \frac{c\varepsilon}{d_S(x)},$$

$$\begin{aligned}\left|\nabla\mathbf{A}^{(1)}(x)\right| &= \left|\nabla(\nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon))\times\mathbf{b}(x) + \nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\times\nabla\mathbf{b}(x)\right| \\ &\leqslant \left|\nabla(\nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon))\right|\cdot\left|\mathbf{b}(x)\right| + \left|\nabla\xi^{(1)}(x,\varepsilon)\right|\cdot\left|\nabla\mathbf{b}(x)\right| \\ &\leqslant \frac{c}{d_S^2(x)\cdot d_\gamma(x)} + \frac{c}{d_S(x)\cdot d_\gamma^2(x)}.\end{aligned}$$

Kadangi ant paviršiaus S funkcija $\xi^{(1)} = 1$, tai remiantis Stokso formule, turime

$$\int_\sigma \mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\int_\Sigma \mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\int_\Sigma \operatorname{rot}(\xi^{(1)}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}\, dS = -\int_{\partial\Sigma}\mathbf{b}\cdot d\mathbf{l}. \tag{11}$$

Tuomet iš (11) lygybės ir 2 lemos išplaukia (10). □

Tegu $\mathbf{A}_{F_1}^{(1)} = -F_1\mathbf{A}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{a} + \mathbf{A}_{F_1}^{(1)})\big|_\sigma$. Tada

$$\int_\sigma \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_\sigma \mathbf{A}_{F_1}^{(1)}\cdot\mathbf{n}\, dS = F_1 - F_1\int_\sigma \mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0.$$

Vadinasi, $\boldsymbol{\beta}$ galima pratęsti į Ω tokiu pavidalu (žr. [3])

$$\mathbf{A}^{(2)}(x) = \operatorname{rot}\left(\xi^{(2)}(x,\varepsilon)\cdot\mathbf{B}(x)\right), \tag{12}$$

čia $\mathbf{B}\in W_2^2(\Omega)$, $\operatorname{rot}\mathbf{B}|_\sigma = \boldsymbol{\beta}$ ir $\xi^{(2)}$ – glodi Hopfo tipo nupjautinė funkcija, $\xi^{(2)} = 1$ ant krašto σ, $\operatorname{supp}\xi^{(2)}$ priklauso mažai σ aplinkai ir $|\nabla\xi^{(2)}(x)| \leqslant \frac{c\varepsilon}{d_\sigma(x)}$.

Apibrėžkime

$$\mathbf{A}_{F_1}(x) = \mathbf{A}^{(2)}(x) - \mathbf{A}_{F_1}^{(1)}(x). \tag{13}$$

Tuomet akivaizdu, kad $\operatorname{div}\mathbf{A}_{F_1}(x) = 0$ ir $\mathbf{A}_{F_1}(x)|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}(x)$.

4 lema. *Bet kokiam* $\mathbf{w}\in W_2^1(\Omega_R)$, $\forall R > R_0$ *su* $\mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0$*, galioja nelygybė*

$$\int_{\Omega_R}\left|\mathbf{A}_{F_1}(x)\right|^2\left|\mathbf{w}(x)\right|^2 dx \leqslant c\varepsilon\int_{\Omega_R}\left|\nabla\mathbf{w}(x)\right|^2 dx. \tag{14}$$

čia konstanta c *nepriklauso nuo* ε *ir* $\mathbf{w}$.

Įrodymas. Vektoriniam laukui $\mathbf{A}^{(2)}$ teisinga nelygybė (žr. [3])

$$\int_{\Omega_R} \big|\mathbf{A}^{(2)}(x)\big|^2 \big|\mathbf{w}(x)\big|^2\,dx \leqslant c\varepsilon \int_{\Omega_R} \big|\nabla \mathbf{w}(x)\big|^2\,dx. \tag{15}$$

Lieka įrodyti analogišką nelygybę vektoriniam laukui $\mathbf{A}^{(1)}$. Iš (9) įverčio turime

$$\int_{\Omega_R} \big|A^{(1)}(x)\big|^2 \big|\mathbf{w}(x)\big|^2\,dx \leqslant c\varepsilon \int_{\Omega_R} \frac{|\mathbf{w}|^2}{d_S^2}\,dx \leqslant c\varepsilon\biggl(\int_{\Omega_{R_0}} \frac{|\mathbf{w}|^2}{d_S^2}\,dx + \int_D \frac{|\mathbf{w}|^2}{d_S^2}\,dx\biggr). \tag{16}$$

Yra žinoma (žr. [3]), kad bet kokiam $\mathbf{w}$, kuris lygus nuliui aibėje $\partial\Omega_{R_0} \cap \partial\Omega$, yra teisingas įvertis

$$\int_{\Omega_{R_0}} \frac{|\mathbf{w}|^2}{d_*^2}\,dx \leqslant c \int_{\Omega_{R_0}} |\nabla \mathbf{w}|^2\,dx, \tag{17}$$

čia $d_* = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \setminus \sigma)$.

Be to, [10] straipsnyje yra įrodyta, kad

$$\int_D \frac{|\mathbf{w}|^2}{d_S^2}\,dx \leqslant c \int_D |\nabla \mathbf{w}|^2\,dx. \tag{18}$$

Taigi, iš (16)–(18) nelygybių gauname

$$\int_{\Omega_R} \big|A^{(1)}(x)\big|^2 \big|\mathbf{w}(x)\big|^2\,dx \leqslant c\varepsilon \int_{\Omega_R} \big|\nabla \mathbf{w}(x)\big|^2\,dx. \tag{19}$$

Tuomet iš (15), (19) išplaukia (14). □

Kadangi per vidinį paviršių srautas yra nulinis, tai kraštinės funkcijos $\mathbf{a}|_{\Gamma_0}$ pratęsimą $\mathbf{A}_0$, kuris tenkina Lerė nelygybę, galima sukonstruoti remiantis [3].

Taigi, vektorinis laukas $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_1} + \mathbf{A}_0$ turi savybes: $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ ir

$$\int_{\Omega_R} |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{u}|^2\,dx \leqslant c\varepsilon \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{u}|^2\,dx, \quad \forall R > R_0. \tag{20}$$

Imdami $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{A}$, nehomogeninį uždavinį suvedėme į gerai žinomą homogeninį:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v} + ((\mathbf{v}+\mathbf{A})\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \nabla p = \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{A},\\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

1 pastaba. Tiek vektoriaus $\mathbf{A}$, tiek (21) uždavinio sprendinio Dirichlė integralas pagal visą sritį Ω yra begalinis (dėl srities geometrijos).

Literatūra

[1] R. Jodelis. Stacionarių Navjė–Stokso lygčių išsprendžiamumas srityje su cilindriniu išėjimu į begalybę. *Magistrinis darbas,* MIF, VU, 2001.

[2] O.A. Ladyzenskaya and V.A. Solonnikov. On finding of solutions of boundary value problems for the Stokes and Navier–Stokes equations with an infinite Dirichlet integral. *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI*, **96**:117–160, 1980.

[3] O.A. Ladyzhenskaya. *Mathematical Theory of the Viscous Incompressible Fluid*. Gordon and Breach, 1969.

[4] J. Leray. Étude de diverses équations intégrales non linéaire et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.*, **12**:1–82, 1933.

[5] H. Morimoto and H. Fujita. A remark of the existence of steady Navier–Stokes flows in a certain two-dimentional infinite channel. *Tokyo J. Math.*, **25**(2):307–321, 2002.

[6] S.A. Nazarov and K. Pileckas. On the solvability of Stokes and the Navier–Stokes problems in the domains that are layer-like at infinity. *J. Math. Fluid Mech.*, **1**(1):78–116, 1999.

[7] J. Neustupe. A new approach to the existence of weak solutions of the steady Navier–Stokes system with inhomogeneous boundary data in domains with noncompact boundaries. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **198**:331–348, 2010.

[8] L.I. Sazonov. On the existence of a stationary symmetric solution of the two-dimensional fluid flow problem. *Mat. Zametki*, **54**(6):138–141, 1993.

[9] V.A. Solonnikov. Stokes and Navier-Stokes equations in domains with non-compact boundaries. *Pitmann Notes in Math.*, **3**:240–349, 1983.

[10] V.A. Solonnikov and K. Pileckas. Certain spaces of solenoidal vectors and the solvability of the boundary problem for the navier–stokes system of equations in domains with noncompact boundaries. *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI*, **73**:136–151, 1977.

[11] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

[12] A. Takashita. A remark on Leray's inequality. *Pacific J. Math*, **157**:151–158, 1993.

SUMMARY

Stationary Navier–Stokes equations with non-homogeneous boundary condition in the unbounded domain

K. Kaulakytė

In this paper the stationary Navier–Stokes system with non-homogeneous boundary condition is studied in the unbounded domain. The extension of the boundary value satisfying Leray's inequality is constructed. Therefore the non-homogeneous boundary problem could be reduced to the homogeneous one which was already investigated before.

Keywords: Navier-Stokes system, Leray's inequality, unbounded domain.