Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 83–88 www.mii.lt/LMR/

2011 m. VPU Jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Eglė Jakaitytė[1], Algirdas Kaučikas[2,3], Edmundas Mazėtis[3]

[1] *M.K Čiurlionio menų mokykla*
T. Kosciuškos 11, LT-08106 Vilnius
[2] *Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas*
Ateities 20, LT-08303 Vilnius
[3] *Lietuvos edukologijos universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Studentų 39, LT-08106, Vilnius
E. paštas: egle.jakaityte@gmail.com; algirdaskaucikas@mruni.eu; edmundas@vpu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariami 2010 metų VPU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

Siekdami, kad į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadas patektų visi stipriausieji, olimpiadų organizatoriai nusprendė vykdyti atrankines olimpiadas, kuriose galėtų dalyvauti visi norintieji, iš kurių galima būtų atrinkti pačius geriausius. Tokie atrankiniai turai vykdomi nuo 1992 metų. Tai Kauno Technologijos universiteto prof. S. Matulionio konkursas, Šiaulių universiteto matematikų olimpiada ir Vilniaus pedagoginio universiteto jaunųjų matematikų olimpiada.

2011 m. kovo 19 d. vyko jubiliejinė XX VPU jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė docentai A. Kaučikas ir E. Mazėtis.

Olimpiadoje dalyvavo apie 130 IX–XII klasių moksleivių. Tarp dalyvių buvo moksleivių, jau pasižymėjusių ne tik Lietuvos, bet ir tarptautinėse olimpiadose. Dešimt dalyvių (po 2–3 iš kiekvienos klasės) buvo pakviesti į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadą.

1 IX klasė

1. Išskaidykite daugianarį $x^8 - x + 1$ į nenulinio laipsnio daugianarių sandaugą.

Kubų skirtumo skaidymas yra gerai žinomas: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Įrodysime, kad dautasis daugianaris dalijasi iš $x^2 - x + 1$. Kadangi $x^8 - x + 1 = x^8 - x^2 + (x^2 - x + 1) = x^2(x^6 - 1) + (x^2 - x + 1) = x^2(x^3 + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^5 - x^2)(x+1)(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1)$.

Atsakymas: $x^8 - x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1)$.

2. Ar galima į lentelės $n \times n$ langelius surašyti sveikuosius skaičius, kurie ne visi lygūs nuliui, taip, kad kiekvienas jų būtų visų jam gretimų skaičių suma: a) kai $n = 3$; b) kai $n = 4$. (Gretimi skaičiai − tai skaičiai, esantys lengeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę).

a) Į kvadrato 3×3 kraštinių vidurius besiremiančiuose kvadratėliuose esančius skaičius pažymėkime taip (1 lentelė):

1 lentelė.

0	y	0
x		z
0	t	0

Tada pagal sąlygą kvadratas skaičiais užpildomas taip (2 lentelė):

2 lentelė.

$x+y$	y	$y+z$
x	S	z
$x+t$	t	$z+t$

Užrašome likusias keturias sąlygas, kurias turi tenkinti lentelėje esantys skaičiai:

$$\begin{cases} x = x + y + S + x + t, \\ y = x + y + S + y + z, \\ z = y + z + S + z + t, \\ t = x + t + S + z + t. \end{cases}$$

Iš čia

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + 2t = 0, \\ 2x + 2y + 2z + t = 0, \\ x + 2y + 2z + 2t = 0, \\ 2x + y + 2z + 2t = 0. \end{cases}$$

Atimdami iš (4) lygties trečiąją, gauname, kad $z = t$. Iš čia gauname, kad lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $(0;0;0;0)$.

Atsakymas: negalima.

b) Pateikiame paprastą kvadratėlių užpildymą, tenkinantį sąlygą (3 lentelė):

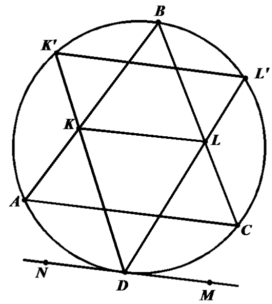
3 lentelė.

0	1	1	0
-1	0	0	-1
-1	0	0	-1
	1	1	

3. Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais x ir y teisinga nelygybė

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geqslant \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{x+y}}.$$

Teigiamiems skaičiams $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ir $b = \frac{1}{\sqrt{y}}$ pritaikome nelygybę $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geqslant \frac{2}{\sqrt[4]{xy}}$. Dabar pakanka įrodyti, kad teisinga nelygybė $\frac{2}{\sqrt[4]{xy}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}}$, kuri ekvivalenti tokiai: $\sqrt{x+y} \geqslant \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{xy} = \sqrt{2\sqrt{xy}}$. Pakėlę kvadratu, gauname ekvivalenčią nelygybę $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$.



1 pav.

4. Taškas D yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lanko AC vidurio taškas. Trikampio kraštinėse AB ir CB yra taškai K ir L tokie, kad tiesės KL ir AC – lygiagrečios. Tiesės DK ir DL kertasi su apskritimu taškuose K' ir L'. Įrodykite, kad taškai K, L, L' ir K' yra viename apskritime.

Nubrėžiame per tašką D apskritimui liestinę MN (1 pav.). Ji lygiagreti su tiese AC ir su tiese KL. Tuomet $\angle K'KL = \angle KDM$, $\angle K'L'D = \angle K'DN$. Iš čia $\angle K'KL + \angle K'L'L = 180^0$, o tai reiškia, kad taškai K, L, L' ir K' yra viename apskritime.

2 X klasė

1. Skaičiai a, b ir c yra trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite, kad teisinga nelygybė

$$\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} > \frac{1}{4}.$$

Nelygybę dauginame iš joje esančių teigiamų vardiklių, gauname, kad ši nelygybė yra ekvivalenti tokiai: $2ab+2bc+2ca > a^2+b^2+c^2$. Trikampio kraštinėms galiojančias nelygybes $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$ daugindami atitinkamai iš c, a, b gauname teisingas nelygybes $ca+bc > c^2$, $ab+ca > a^2$, $bc+ab > b^2$, kurias sudėję gauname reikiamą nelygybę.

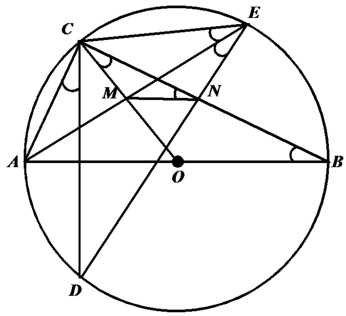
2. Ar galima visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 16 surašyti: a) į eilę; b) ratu taip, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių suma būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas?

a) Galima. Vienas iš variantų yra toks: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

b) Tarkime, kad surašome skaičius ratu taip, kaip nurodyta sąlygoje, o skaičiui 16 gretimi yra skaičiai x ir y. Tuomet $x, y \leqslant 15$ ir $16+x = a^2$, $16+y = b^2$. Kadangi $x \leqslant 15$, tai $16+x \leqslant 31$, t. y. $16 < a^2 < 31$ ir $a^2 = 25$. Analogiškai $y \leqslant 15$, $16+y \leqslant 31$ ir $b^2 = 25$. Taigi $a = b = 5$ – prieštara, todėl minėtų skaičių ratu pagal uždavinio sąlygą išdėstyti negalima.

3. Duotas skaičius $144\ldots4$ (n ketvertų). Su kuriomis n reikšmėmis šis skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas?

Aišku, kad $144 = 12^2$, $1444 = 38^2$. Įrodysime, kad daugiau tokių n reikšmių nėra. Tegul $n \geqslant 4$ ir $1444\ldots4 = n^2 = 4k^2$, $k \in N$. Padaliję iš 4, gauname lygybę $361\ldots1 = k^2$. Kairėje lygybės pusėje esantis skaičius baigiasi $n-2$ vienetais, kurių



2 pav.

yra ne mažiau negu 2. $k^2 = (2l+1)^2 = 4(l^2+l)+1$, todėl $361\ldots10 = 4(l^2+l)$. Bet skaičius $361\ldots10$ nesidalija iš 4, nes jo paskutiniai du skaitmenys yra 10.

Atsakymas: $n = 2$ ir $n = 3$.

4. Apskritimo centras yra taškas O, styga CD statmena skersmeniui AB. Styga AE eina per spindulio OC vidurio tašką. Kokiu santykiu styga DE dalija stygą BC?

Sakykime, kad styga AE eina per spindulio OC vidurio tašką M (2 pav.), o tiesės CB ir DE kertasi taške N. Kadangi lankai AC ir AD lygūs, tai $\angle CEA = \angle AED = \angle ACD = \angle ABC = \angle OCB = \alpha$. Iš čia seka, kad keturkampis $MNEC$ yra įbrėžtas į apskritimą, todėl $\angle CNM = \angle CEM = \alpha$. Iš čia seka, kad tiesės MN ir AB yra lygiagrečios. Kadangi taškas M yra takarpos OC vidurio taškas, tai atkarpa MN yra trikampio BOC vidurinė linija. Taigi $CN : NB = 1$.

3 XI klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x(1+\frac{1}{x^2+y^2}) = 12, \\ 5y(1-\frac{1}{x^2+y^2}) = 4. \end{cases}$$

Pažymėję $\frac{1}{x^2+y^2} = t > 0$, užrašome išraiškas: $x = \frac{12}{5(t+1)}$, $y = \frac{4}{5(1-t)}$. Taigi $x^2+y^2 = \frac{1}{t} = \frac{144}{25(t+1)^2} + \frac{16}{25(t-1)^2}$. Iš čia gauname sangrąžinę lygtį $25(t^4+1) - 160(t^3+t) + 206t^2 = 0$. Pažymėję $t + \frac{1}{t} = u \geqslant 2$, turime, kad $t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 - 2$. Taigi $u^2 - \frac{32}{5}u + \frac{156}{25} = 0$, $u_1 = \frac{26}{5}$, $u_2 = \frac{6}{5}$. Taigi $t + \frac{1}{t} = \frac{26}{5} = 5 + \frac{1}{5}$. Įrašę šias reikšmes į x ir y išraiškas, gauname sistemos sprendinius $(2;1)$ ir $(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5})$.

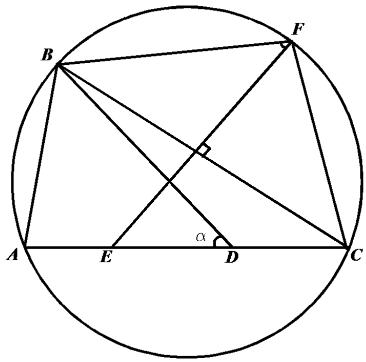
2. Skaičiai a, b ir c yra trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite, kad teisinga nelygybė

$$\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} > \frac{1}{4}.$$

Žr. X klasės 1 uždavinį.

3. Raskite visus natūraliuosius n, su kuriais skaičiaus 5^n skaitmenų suma būtų lygi 2^n.

Skaičius 5^n negali būti $(n+1)$-ženklis, nes mažiausias $(n+1)$-ženklis skaičius yra 10^n, o $5^n < 10^n$. Taigi 5^n gali būti daugiausiai n-ženklis, o jo skaitmenų suma neviršija $9n$. Iš čia gauname, kad $2^n \leqslant 9n$. Šią nelygybę tenkina natūralieji skaičiai



3 pav.

1, 2, 3, 4 ir 5. Kai $n = 6$, turime $2^6 = 64 > 9 \cdot 6 = 54$. Kai $n > 6$, nelygybė $2^n > 9n$ akivaizdžiai teisinga. Patikrinus n reikšmes 1, 2, 3, 4 ir 5, gauname, kad tik skaičius $5^3 = 125$ skaitmenų suma $8 = 2^3$. Taigi, tinka tik $n = 3$.

4. Trikampio ABC kraštinėje AC yra taškai D ir E tokie, kad $AB = AD$, $BE = EC$, o taškas E yra tarp taškų A ir D. Taškas F yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lanko BC vidurio taškas. Įrodykite, kad taškai B, E, D ir F yra apskritime.

Sakykime, kad $\angle BDA = \alpha$ (3 pav.). Iš to, kad $AD = AB$ seka, kad $\angle BAD = 180^0 - 2\alpha$. Įbrėžtinis kampas CBF yra lygus pusei lanko FC, t. y. ketvirčiui lanko BC, o įbrėžtinis kampas BAC lygus pusei lanko BC. Taigi $\angle CBF = \frac{1}{2}\angle BAC = 90^0 - \alpha$. Iš lygybių $EB = EC$ ir $FB = FC$ seka, kad tiesė EF yra takarpos BC vidurio statmuo, t. y. $\angle BFE = \alpha$. Taigi atkarpa BE iš taškų D ir F matoma kampu α, t. y. taškai B, E, D ir F yra viename apskritime.

4 XII klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x(1 + \frac{1}{x^2+y^2}) = 12, \\ 5y(1 - \frac{1}{x^2+y^2}) = 4. \end{cases}$$

Žr. XI klasės 1 uždavinį.

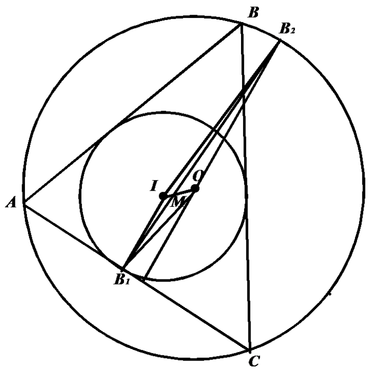
2. Kokią liekaną gauname 2^{341} padaliję iš 341?

Pastebėję, kad $2^{10} = 1024 = 3 \cdot 341 + 1$, gauname, kad $2^{340} = (2^{10})^{34}$ dalijant iš 341 gauname liekaną, lygią 1. Taigi $2^{341} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 341)$. Taigi ieškoma liekana lygi 2.

3. Skaičius a yra toks, kad $a^5 - a^3 + a - 2 = 0$. Įrodykite, kad $3 < a^6 < 4$.

Funkcijos $f(x) = x^5 - x^3 + x - 2$ išvestinė $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ yra bikvadratinis trinaris, įgyjantis tik teigiamas reikšmes. Taigi $f(x)$ yra didėjanti funkcija. Nesunku patikrinti, kad $f(\sqrt[6]{3}) < 0$ ir $f(\sqrt[3]{2}) > 0$. Taigi lygtis $f(x) = 0$ intervale $(\sqrt[6]{3}; \sqrt[3]{2})$ turi vienintelį sprendinį.

4. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas kraštines BC, CA ir AB liečia taškuose A_1, B_1 ir C_1. Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lankų BAC, CBA ir ABC



4 pav.

vidurio taškai yra A_2, B_2 ir C_2. Įrodykite, kad tiesės A_1A_2, B_1B_2 ir C_1C_2 susikerta viename taške.

Sakykime, kad trikampio kraštinę AC įbrėžtas apskritimas liečia taške B_1, o lanko ABC vidurio taškas B_2 (4 pav.). Jei taškai I ir O – įbrėžto ir apibrėžto apskritimų centrai, tai $IB_1 \perp AC$, o tiesė OB_2 – atkarpos AC vidurio statmuo, t. y. $OB_2 \perp AC$. Taigi tiesės IB_1 ir OB_2 yra lygiagrečios, todėl keturkampis IB_1OB_2 yra trapecija. Sakykime, kad trapecijos įstrižainės B_1B_2 ir IO kertasi taške M. Tuomet $OM : MI = OB_2 : IB_1 = R : r$, čia r ir R yra įbrėžto į trikampį ABC ir apibrėžto apie trikampį ABC apskritimų spinduliai. Analogiškai, jei tiesės A_1A_2 ir IO kertasi taške Q, tai $OQ : QI = R : r$, o jei tiesės C_1C_2 ir IO kertasi taške N, tai $ON : NI = R : r$. Taigi taškai M, Q ir N sutampa, taigi tiesės A_1A_2, B_1B_2 ir C_1C_2 kertasi viename taške.

Literatūra

[1] A. Grincevičius ir J. Mačys. *Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai.* Šviesa, Kaunas, 1990.

[2] J. Mačys. *Olimpiadinis matematikos uždavinynas.* TEV, Vilnius, 2003.

[3] *Olimpiadinis matematikos uždavinynas.* Red. J. Kubilius. Šviesa, Kaunas, 1972.

SUMMARY

Survey of VPU olympiad 2011 for young mathematicians

E. Jakaitytė, A. Kaučikas, E. Mazėtis

The texts and solutions of the VPU young mathematicians olympiad – 2011 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.