Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 100–104 www.mii.lt/LMR/

Kai kurie kombinatorikos ir statistikos mokymo ypatumai

Algis Kavaliauskas[1,3], Inga Žilinskienė[2,3]

[1] *Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
[2] *Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos institutas*
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
[3] *Vilniaus Geminino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: algis.kavaliauskas@mif.vu.lt; inga.zilinskiene@mii.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamos kai kurių kombinatorikos ir statistikos terminų apibrėžtys. Siekiant išsiaiškinti, kodėl mokiniai taip sunkiai įsisavina tam tikras kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos srities žinias, analizuojama mokomoji literatūra – nagrinėjamos derinių, gretinių ir imties sąvokos bei jų apibrėžtys. Parodomi mokykliniuose vadovėliuose pasitaikantys suformuluotų apibrėžčių trūkumai ir pasiūloma, kaip jų išvengti.

Raktiniai žodžiai: matematikos mokymas, kombinatorika, statistika, matematinės sąvokos.

Įvadas

Kiekviena matematikos šaka pasižymi savo aksiomomis ir tik jai būdinga logika. Statistika savo matematine logika labai skiriasi nuo tradicinės klasikinės matematikos. Galbūt tai ir yra viena iš priežasčių, kodėl mokiniai taip sunkiai įsisavina kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos žinias. Iš mokyklos atsinešamos paviršutiniškos šios srities žinios sąlygoja tai, jog tarp nematematinių specialybių studentų ši matematikos šaka yra viena iš mažiausiai mėgstamų.

Tačiau šios matematikos šakos reikšmingumas yra neginčijamas. Tai įrodo jos platus taikymas ne tik moksle, bet ir įvairiose kitose gyvenimo srityse: medicinoje, bankininkystėje, versle, oficialiojoje valstybės statistikoje ir t. t. Įdomu tai, jog, pavyzdžiui, Vokietijos mokyklose statistikos mokoma žymiai plačiau ir didesne apimtimi [9].

Visa tai skatina ieškoti būdų, kaip geriau išdėstyti šią matematikos sritį. Šis straipsnis, kaip ir kiti autorių išspausdinti straipsniai [4, 5], siūlo kai kurių šios srities metodinių problemų sprendimus.

1 Šiek tiek istorijos

Pagrindinės kombinatorikos sąvokos kildinamos iš antikos laikų. Jau VI amžiuje pr. Kr. indų gydytojas Sushruta nagrinėjo, kiek iš 6 skirtingų skonių galima sudaryti skirtingų kombinacijų. Taip pat kombinatoriniai skaičiavimai, susiję su Schröder skaičiais, randami Chrysippus (III a. pr. Kr.) ir Hipparchus (II a. pr. Kr.) darbuose.

1 lentelė. Derinių ir gretinių terminai kitomis kalbomis.

Lietuvių	Anglų	Vokiečių	Prancūzų
derinys	combination	Kombination	combinaison
gretinys	arrangement	Variation	arrangement

Kombinatorikos mokslas toliau buvo plėtojamas viduramžiais. Indų matematikas Mahavira (apie 850 m.) pasiūlė kėlinių ir derinių skaičiavimo formules. Filosofas ir astronomas Rabbi Abraham ibn Ezra (apie 1140 m.) nustatė binominių koeficientų simetriškumą, tačiau visa formulė buvo sukurta 1321 m. matematiko Levi ben Gerson (labiau žinomas kaip Gersonides).

Renesanso metu kombinatorikos teorija išgyveno atgimimą. XX a. antroje pusėje kombinatorikos mokslo plėtotę rodo daugybė šia tematika leidžiamų mokslinių žurnalų ir vykstančių konferencijų. Besivystydama kombinatorikos teorija integravosi ir į kitas matematikos sritis: algebrą, tikimybių teoriją, statistiką, funkcinę analizę ir t. t. [11]

Palyginimui 1 lentelėje pateikiami derinių ir gretinių terminai kitomis kalbomis.

2 Kombinatorika. Gretinių ir derinių sąvokos

Kombinatorika nagrinėja kiek skirtingų junginių ar rinkinių, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš nurodytų objektų. Šiam uždaviniui spręsti mokiniams siūlomi trys pagrindiniai būdai:

Pirmas būdas – grynai praktinis. Užtenka tiesiog išrašyti visus galimus atvejus ir po to juos suskaičiuoti. Jis taikytinas tik tais atvejais, kai rinkinių yra nedaug. Tada egzistuoja galimybė ir vizualizuoti atliekamus skaičiavimus, pateikiant medžiagą mokiniams suprantamiau.

Antras būdas – rinkinių skaičių galima surasti taikant kombinatorinę daugybos (sudėties) taisyklę.

Trečias būdas – pabandyti pasinaudoti gretinių ar derinių apibrėžtimis.

Paanalizuokime gretinių ir derinių sąvokas.

Atverskime pakankamai pilną ir gerai parengtą V. Pekarsko matematikos kurso kartojimo medžiagą [8] ir pasistenkime suprasti, kas yra gretiniai ir kėliniai:

1 apibrėžtis. Junginiai, sudaryti iš n elementų po m elementų, kurie skiriasi vienas nuo kito bent vienu elementu arba elementų tvarka, vadinami gretiniais iš n elementų po m.

Gretiniai, sudaryti iš visų duotųjų elementų, vadinami kėliniais.

Labai panašiai ši sąvoka apibrėžiama ir dešimtosios klasės vadovėlyje [1]:

2 apibrėžtis. Gretiniais iš n elementų po k vadinami tokie rinkiniai, kurių kiekvienas turi k elementų, pasirinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba bent vienu elementu, arba elementų išdėstymo tvarka.

Gretinių iš n elementų po k skaičių žymėsime A_n^k.

Kėliniais iš n elementų vadinami tokie rinkiniai, kurių kiekvienas sudarytas iš visų n elementų ir kurie vienas nuo kito skiriasi tik elementų išdėstymo tvarka.

Kėlinių, sudarytų iš n elementų, skaičių žymime P_n.

Iš šių apibrėžčių aišku, kad kėliniai yra atskiras gretinių atvejis. Jeigu rinkiniai sudaryti iš visų elementų, tai jie gali vadintis ir gretiniais, ir kėliniais. Taip pat svarbus gretinių atskiras atvejis, kai $k = n$, pavadintas kitu vardu – kėlinys.

Panašiai V. Pekarsko knygoje [8] apibrėžiami ir deriniai:

3 apibrėžtis. Junginiai, sudaryti iš n elementų po m, kurie skiriasi vienas nuo kito bent vienu elementu, bet ne jų tvarka, vadinami deriniais iš n elementų po m.

Dešimtosios klasės vadovėlyje [1] randame:

4 apibrėžtis. Deriniais iš n elementų po k vadinami tokie rinkiniai, kurių kiekvienas turi po k elementų, pasirinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu.

Derinių iš n elementų po k skaičių žymime C_n^k.

Remiantis šiomis apibrėžtimis, pabandykime nustatyti gretinių ir derinių skaičių. Pasirodo, kad jų skaičiaus tiksliai nustatyti neįmanoma. Pavyzdžiui, į klausimą, kam lygus kėlinių skaičius P_n, korektškas atsakymas, tiesiogiai gaunamas iš apibrėžčių, turėtų būti toks: $1 \leqslant P_n \leqslant n!$ Panašiai gretinių skaičius iš šių apibrėžčių gaunamas: $1 \leqslant A_n^k \leqslant n!/(n-k)!$. Taip atsitinka todėl, kad apibrėžtyse nieko nepasakyta apie visą tam tikrų rinkinių aibę, o nurodoma tik tai, kaip turi būti sudaryti atitinkami rinkiniai. Todėl jeigu iš trijų elementų 7, 8 ir 9 rinksime rinkinius po tris elementus, tai pagal tokią apibrėžtį kėliniais tinka vadinti aibes $\{789; 798; 879\}$ arba $\{789; 897\}$, nes abiejose aibėse rinkiniai vienas nuo kito skiriasi tik išsidėstymo tvarka. Todėl kėlinių skaičių iš trijų elementų po tris gavome lygų trims arba dviem.

Dar daugiau, naudojantis šiomis apibrėžtimis, pasitaiko atvejų, kai gretiniai niekuo nesiskiria nuo derinių. Pavyzdžiui, tegu pradinė aibė sudaryta iš trijų elementų A, B, C, t. y., $n = 3$. Be to, tegu $k = 2$. Tada rinkiniai AB, BC, CA yra ir deriniai, ir gretiniai kartu.

Skirtumas tarp gretinių ir derinių išryškėja tada, kai paimame visus gretinius ir visus derinius iš n elementų po k ir lyginame šias dvi aibes. Tačiau tai nepaminėta apibrėžtyse. Todėl šios apibrėžtys turėtų būti patobulintos. Palyginimui pateikiame korektišką J. Kubilius [6] apibrėžtį:

5 apibrėžtis. Duota aibė $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Gretiniu be pasikartojimų iš n elementų po r elementų vadinamas bet kuris sutvarkytas duotosios aibės poaibis iš r elementų $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}$. Du gretiniai skiriasi arba tais pačiais elementais, arba jų tvarka; elementai negali pasikartoti tame pačiame gretinyje. <...> Taigi VISŲ gretinių be pasikartojimų iš n elementų po r skaičius yra A_n^r.

Apskritai derinys ir gretinys yra daugiau visos rinkinių aibės savybė. Todėl geriau būtų apibrėžti visų pirma pilną gretinių ir derinių aibę, o po to, tos aibės atskirąjį elementą vadinti gretiniu ar deriniu, nes pačios aibės struktūra nulemia, ar jos elementas yra gretinys, ar derinys. Taigi siūlome iš pradžių įvesti gretinių ir derinių aibės apibrėžtis, nes būtent aibės sudarymo principas apsprendžia ir atskiria gretinius nuo derinių. Visų gretinių ir visų derinių aibių sankirta yra ne tuščia aibė. Dar daugiau, visų derinių aibė iš esmės yra visų gretinių aibės poaibis. Todėl sąvokos „gretinys“ ir „derinys“ gali būti neatskiriamos, jeigu kalbama apie vieną elementą. Dėl šios priežasties jų geriau nenaudoti vienaskaitoje. Siūlome tokią derinių apibrėžtį:

6 apibrėžtis. Duota aibė $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Aibė, sudaryta iš visų galimų rinkinių iš n elementų po k, kurie skiriasi vienas nuo kito bent vienu elementu, vadinama derinių aibe iš n elementų po k. Šios aibės elementų skaičių žymėsime C_n^k.

3 Statistika. Imties sąvoka

Tarkime, reikia atlikti kokį nors statistinį tyrimą. Todėl turime tiksliai išsiaiškinti tris pagrindines sąvokas: kas tai yra imtis, imties dydis ir duomenys. Gal šiuos dalykus galėtumėme išsiaiškinti pasitelkę mokyklos vadovėlį? Atsivertę jį [1] perskaitome:

7 apibrėžtis. Surinkti duomenys vadinami imtimi, surinktų duomenų skaičius imties dydžiu.

Kad būtų aiškiau, panagrinėkime pavyzdį. Tegu iš 100 žmonių nutarta išrinkti 20 žmonių imtį. Norime ištirti tris jų požymius: pajamų dydį, darbuotojų skaičių ir įmonės patalpų ploto dydį. Atlikę šį statistinį tyrimą, gausime trijų tipų duomenis. Ar tai reiškia, kad turime tris imtis?

Iš tikrųjų imtį sudaro tos dvidešimt išrinktų įmonių. Imties dydis yra lygus 20. Imtis nėra duomenys, skaičiai. Imtį sudaro tiriami objektai, šiuo atveju įmonės. Išrinkus imtį, gali būti ištirti vienokie ar kitokie jos požymiai. Taip gaunami duomenys apie kiekvieną požymį. Palyginus V. Čekanavičiaus ir G. Murausko [3] bei šaltiniuose [2, 10] pateiktas apibrėžtis, korektiška „imties“ apibrėžtis būtų:

8 apibrėžtis. Populiacija – objektų, kurių požymiai tiriami, aibė. Imtis – tai populiacijos dalis, naudojama statistiniam tyrimui.

Žodis „populiacija“ dažnai siejamas su biologija. Čia ši sąvoka turi platesnę prasmę ir žymi bet kokių statistiškai tiriamų objektų aibę [6, 7].

Sugrįžkime prie mokyklinės apibrėžties. Netikslinga duomenis tapatinti su imtimi. Gali būti taip, kad imtis išrinkta, o duomenų negauta. Pavyzdžiui, dėl vienokių ar kitokių priežasčių visos dvidešimt įmonių nepateikė jokių duomenų (neatsakė į apklausą), nors imtis buvo išrinkta. Be to, tapatindami duomenis su imtimi, susiduriame ir su kai kuriais matematiniais rezultatų apdorojimo keblumais. Tai atsitinka tais atvejais, kai dalis tiriamos populiacijos neatsako į apklausą. Tokiu atveju gauname, kad imties dydis yra atsitiktinis.

4 Išvados

Kadangi matematika yra grindžiama tikslia logika, tai ir jos pagrindas – sąvokos – turi būti apibrėžtos tiksliai ir vienareikšmiškai. Matematikoje kiekvienas žodis, ženklas yra labai svarbus, todėl jų vartojimas (ar nevartojimas) turi būti pagrįstas.

Mokyklinėje matematikoje, besistengiant paprasčiau, suprantamiau išaiškinti pagrindines sąvokas (kas yra labai sveikintina), svarbu neperžengti tam tikros ribos ir apibrėžti šias sąvokas ne tik paprastai ir suprantamai, bet ir matematiškai teisingai. Be to, matematinis tikslumas dažnai ne tik neapsunkina, bet, atvirkščiai, palengvina, padeda geriau suprasti išvestinių sąvokų ir terminų apibrėžtis. Tai ir bandoma parodyti šiame straipsnyje.

Literatūra

[1] Autorių kolektyvas. *Matematika 10.* I dalis. TEV, 2002.

[2] W. G. Cochran. *Sampling Techniques.* John Wiley and Sons, New York, 1977.

[3] V. Čekanavičius ir G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai.* 1 dalis. TEV, 2006.

[4] A. Kavaliauskas. Matematinių objektų ypatumai. Matiniai dydžiai. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **47**:240–243, 2007.

[5] A. Kavaliauskas. Matematinių objektų ypatumai. Funkcija. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **48**–**49**:105–108, 2008.

[6] J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika.* Vilnius: Mokslas, 1980.

[7] D. Krapavickaitė ir A. Plikusas. *Imčių teorijios pagrindai.* Technika, Vilnius, 2005.

[8] V. Pekarskas. *Matematika: kurso kartojimo medžiaga.* Šviesa, Kaunas, 2004.

[9] K. Rüdiger, M. Breger, H. Ch. Fünning, W. Kuypers and J. Lauter. *Mathematik Sekundarstufe II Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.* Cornelsen, 2004.

[10] C. Särndal, B. Swensson and J.Wretman. *Model Assisted Survey Sampling.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[11] Wikipedia. Apie kombinatoriką. Available from Internet: http://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics#cite_note-1.

SUMMARY

Some aspects of teaching combinatorics and statistics
A. Kavaliauskas, I.Žilinskienė
The paper deals with some definitions of combinatorial and statistical terms. Trying to find out why some certain knowledge of combinatory, probability theory ant statistics is difficult to acquire for pupils, some schoolbooks of mathematics are examined. The definitions of terms like Combinations, Arrangements, Sample are analyzed. Some shortcomings of the definitions are highlighted together with proposals for their improvement.

Keywords: teaching mathematics, combinatorics, statistics, mathematical concepts.