LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
52 tomas, 2011, 122–127

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Funkcinės lygtys kaip mokyklinė tema

Juozas Juvencijus Mačys

Viniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt

Santrauka. Lietuvos vidurinės mokyklos pereina prie naujų, modulinių programų. Straipsnyje aptariama viena iš modulių temų – funkcinės lygtys. Rekomenduojama klausimo literatūra, analizuojami konkretūs pavyzdžiai ir tipinės klaidos.

Raktiniai žodžiai: matematikos dėstymas, funkcinės lygtys, olimpiados.

Funkcinės lygtys mokykloje ne naujiena – jų būdavo ir olimpiadose, ir įvairių egzaminų užduotyse. Tiesa, mokinys kartais ir nesuvokdavo, kad jis sprendžia funkcinę lygtį. Pavyzdžiui, Lietuvoje per stojamuosius egzaminus yra buvęs toks uždavinys.

Funkcija $f(x)$ su visais $x \neq 0$ tenkina lygybę $2f(x) + 3f(1/x) = 5x$. Raskite $f(1/4)$.

Čia mokiniui nieko nereikia žinoti – nei kas ta funkcinė lygtis, nei kas yra jos sprendiniai. Įstatęs $x = 1/4$, jis gauna lygtį $2f(1/4)+3f(4) = 5/4$, bet joje kaip ir du „nežinomieji“. Visa gudrybė – pastebėti, kad į pradinę lygtį verta dar įstatyti $x = 4$. Tada $2f(4)+3f(1/4) = 20$. Iš gautos tiesinių lygčių sistemos randame $f(1/4) = 23/2$.

Ne ką pasikeistų uždavinys ir jo sprendimas, jeigu būtų prašoma rasti $f(x)$. Pakeitę x į $1/x$, gauname lygtį $2f(1/x) + 3f(x) = 5/x$, o iš sistemos – ir funkciją $f(x) = 3/x - 2x$. Bet dabar jau sakome, kad sprendėme funkcinę lygtį ir radome jos (vienintelį) sprendinį, t. y. funkciją $f(x)$, kuri su visomis $x \neq 0$ reikšmėmis duotąją lygybę daro teisingą. Dabar naujosiose programose numatyta ir tema „Funkcinės lygtys“, taigi mokytojui tenka susipažinti su jomis giliau. Straipsnio gale nurodyta mokytojui prieinama literatūra (kad ir iš interneto). Jeigu mokiniui iš pradžių (ir ne tik iš pradžių, o gal ir iš viso) galima rekomenduoti uždavinius iš [2] knygos, psl. 76–80, 139–142, tai mokytojui reikia būti pasiruošusiam giliau (žr. [3, 4, 2, 1]). Kad tai rimtas dalykas, parodo ir šis straipsnelis. Vengdamas perrašinėti cituojamus tekstus, noriu tik pavyzdžiais parodyti, kaip nesunku apsirikti, sprendžiant (ar net formuluojant) funkcinių lygčių uždavinius.

Mūsų ką tik nagrinėtame pavyzdyje funkcija buvo apibrėžta su visais $x \neq 0$. Dažniausiai ieškomųjų funkcijų apibrėžimo sritis būna $\mathbf{R}$ (tada kartais ji net nenurodoma), bet kartais – tai racionaliųjų skaičių aibė $\mathbf{Q}$, natūraliųjų skaičių aibė $\mathbf{N}$, teigiamųjų skaičių aibė $(0, +\infty)$ ir pan. To paties uždavinio sprendimas skirtingose aibėse gali labai skirtis (žr. 4 pavyzdį).

Suformuluokime mūsų paminėto uždavinio sąlygą kruopščiau.

1 pavyzdys. *Raskite visas tokias funkcijas $f(x)$, kad kiekviena jų apibrėžta realiųjų skaičių aibėje $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, įgyja realiąsias reikšmes ir su visomis reikšmėmis $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ teisinga lygybė $2f(x) + 3f(1/x) = 5x$.*

Iš šio pavyzdžio aiškėja, kad formuluojant funkcinių lygčių uždavinį nurodoma:

1) ieškomosios funkcijos $f(x)$ (jų gali būti daugiau kaip viena) apibrėžimo sritis;

2) ieškomosios funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis (dažnai ji net nenurodoma, nes nagrinėjame tik funkcijas, įgyjančias realiąsias reikšmes, ir tik retkarčiais srities nurodymas turi įtakos sprendimui ir atsakymui);

3) lygtis, kurią turi tenkinti $f(x)$ su nurodytomis kintamųjų reikšmėmis;

4) papildomos sąlygos (dažniausiai tai vadinamosios pradinės sąlygos, sakysime, $f(0) = 0$, bet būna ir kitokių – pavyzdžiui, $f(x)$ turi ne daugiau kaip vieną trūkį ir pan.).

Kad nekiltų nesusipratimų, viską reikia nurodyti labai kruopščiai. Pavyzdžiui, kai sprendžiame lygtį $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, galima reikalauti, kad ši lygybė būtų teisinga su visais sveikaisiais x ir y, su natūraliaisiais x ir y, su racionaliaisiais x ir y, su visais realiaisiais x ir y; kad funkcija $f(x)$ būtų diferencijuojama (turėtų išvestinę), būtų tolydi, būtų aprėžta, būtų monotoniška ir t. t.; kad būtų $f(x) \neq 0$, kad būtų $f(0) = 1$, ir pan. Nuo to labai priklauso tiek sprendimas, tiek atsakymas.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių, paimtų iš nurodytų šaltinių (cituojant formuluotės ir kalba netaisomos).

2 pavyzdys. *Raskite* $f(x)$*, jeigu su* $x \neq 1$*,* $f(x) + f(1/(1-x)) = x$*.*

Čia autorius turėjo galvoje, kad $f(x)$ apibrėžimo sritis yra $x \neq 1$, o lygybė turi būti turi būti tenkinama toje pačioje srityje $x \neq 1$. Pateikiamas ir uždavinio atsakymas: $f(x) = 1/2 + x/2 - 1/(2x) - 1/(2-2x)$. Deja, matome, kad ši funkcija neapibrėžta taške $x = 0$, taigi jokiu būdu negali tenkinti lygties taške 0. Tikroji situacija dar blogesnė – nereikia nieko ir spręsti, nes kad ir kokią imtume funkciją $f(x)$, ji negali tenkinti lygties taške 0: lygybės $f(0) + f(1) = 0$ niekada negalima laikyti teisinga, nes $f(1)$ tiesiog neapibrėžta. Vadinasi, nagrinėjamo uždavinio atsakymas yra toks: tokių funkcijų nėra. O dabar įsivaizduokime mokinį, kuris parašė tokį atsakymą, nes viską suprato teisingai. Ko gero, jis gautų 0 taškų. Ir reikia superolimpiadininko, kuris ryžtųsi taisyti sąlygą, kad uždavinys taptų korektiškas.

Paprasčiausia uždavinio sąlygą taisyti taip.

Raskite visas $f(x)$*, apibrėžtas su visais realiaisiais skaičiais* $x \neq 0$ *ir* $x \neq 1$*, kurios su visais* $x \neq 0$*,* $x \neq 1$ *tenkina lygtį* $f(x) + f(1/(1-x)) = x$*.*

Beje, visai nebūtinai funkcijos apibrėžimo sritis turi sutapti su sritimi, kurioje teisinga reikiama lygybė. Pavyzdžiui, mūsų nagrinėjamo uždavinio salygą galima ištaisyti ir taip.

Raskite visas $f(x)$*, apibrėžtas su visais realiaisiais skaičiais, kurioms su visais* $x \neq 0$*,* $x \neq 1$ *teisinga lygybė* $f(x) + f(1/(1-x)) = x$*.*

Kaip tokias lygtis spręsti, paaiškinta kad ir [1]. Nesunku įsitikinti, kad ją tenkina funkcijos (ir tik jos!) $f(x) = \{1/2 + x/2 - 1/(2x) - 1/(2-2x),$ kai $x \neq 0,\ x \neq 1; = C_1,$ kai $x = 0; = C_2,$ kai $x = 1\}$, taigi, pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \{1/2 + x/2 - 1/(2x) - 1/(2-2x),$ kai $x \neq 0,\ x \neq 1; = 0$ kitur$\}$, arba, pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \{1/2+x/2-1/(2x)-1/(2-2x);\ x \neq 0,\ x \neq 1; = 3,$ kai $x = 0; = 7,$ kai $x = 1\}$.

Ir, pagaliau, dar vienas esminis dalykas. Kai sprendžiame mokyklines lygtis, dažniausiai lygtį pertvarkome ekvivalenčiai, o tada gautų sprendinių tikrinti kaip ir nebereikia. Pavyzdžiui, mokykloje netikriname sprendinių, gautų sprendžiant pirmojo laipsnio ar kvadratines lygtis – laikome, kad tai jau padaryta teorijoje kartą ir „ant visados“ (betgi pasitikrinti visada verta: o gal kur nors apsirikome?). Visai kas kita sprendžiant funkcines lygtis – čia apie pertvarkių ekvivalentumą net ir šnekėti sunku, taigi paprastai lieka vienintelė išeitis – gautus sprendinius tikrinti. Beje, kartais tai visai sudėtingas (ir atsakingas!) uždavinys – tikrindami atskleidžiame ir sąlygos netikslumus. Kaip reikia tikrinti sprendinį, skirtingose srityse apibrėžtą skirtingomis formulėmis, pademonstruota 3 pavyzdyje. Sudėtingesnių tikrinimo pavyzdžių rasite ir toliau.

Žinoma, dar blogiau, kai sprendinį pametame.

3 pavyzdys. *Raskite visas funkcijas* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, tenkinančias lygtį* $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x) \cdot f(y)$*;* $x, y \in \mathbf{R}$.

Nurodytas uždavinio sprendimas bei atsakymas. (Beje, čia ir toliau vartojamas tapačiosios lygybės ženklas $\equiv$, reiškiantis, kad lygybė teisinga visoje aibėje $\mathbf{R}$.) Cituojame:

„*Sprendimas.* Tegu $x \in \mathbf{R}$ ir $y = x$; tada iš pradinės lygties gausime lygtį $2xf(x) = 2xf^2(x)$, arba lygtį $xf(x)(f(x)-1) = 0$. Kadangi ji galioja ir tada, kai $x \neq 0$, tai yra tik dvi galimybės: arba $f(x) = 0$, arba $f(x) = 1$. Jei $f(x) = 0$, tai iš pradinės lygties gauname lygybę $xf(y) = 0$, galiojančią su visais $y \in \mathbf{R}$. Vadinasi (nes x gali būti nelygus nuliui), $f(y) \equiv 0$ aibėje $\mathbf{R}$, kai $f(x) = 0$.

Jei $f(x) = 1$, tai iš pradinės lygties gauname lygybę $xf(y) + y = (x+y)f(y)$, o iš jos – lygybę $y(f(y)-1) = 0$, galiojančią su visais $y \in \mathbf{R}$. Taigi $f(y) = 0$ su visais $y \in \mathbf{R}$, kai $f(x) = 1$.

Iš atliktos analizės matome, kad yra tik dvi funkcijos – pradinės lygties sprendiniai: $f(x) \equiv 0$ ir $f(x) \equiv 1$ (aibėje $\mathbf{R}$).

Atsakymas. $f(x) \equiv 0$ ir $f(x) \equiv 1$ (aibėje $\mathbf{R}$).“

Ir vis dėlto nesunku patikrinti, kad lygtį (be nurodytų dviejų funkcijų) tenkina, pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \{1,\ \text{kai}\ x \neq 0; = 0,\ \text{kai}\ x = 0\}$. Iš tikrųjų, sąlyga išpildyta visoms poroms (x, y): jei $x = 0$, tai $f(x) = 0$, ir sąlygos lygybė virsta teisinga, $0 \cdot f(y) + y \cdot 0 = (0 + y) \cdot 0 \cdot f(y)$. Atvejis $y = 0$ analogiškas, o atvejis $x \neq 0$, $y \neq 0$ aiškus – teisinga lygybė $x + y = (x+y) \cdot 1 \cdot 1$.

Vadinasi, sprendžiant uždavinį įsivėlė klaida, kurią ne taip jau ir lengva pastebėti (juo labiau, kad sprendimas surašytas visiškai nesuprantamai: sakykite, ką reiškia pasažas „Vadinasi (nes x gali būti nelygus nuliui), $f(y) \equiv 0$ aibėje $\mathbf{R}$, kai $f(x) = 0$“?).

Sprendime buvo gauta lygybė $xf(x)[f(x)-1] = 0$. Iš jos sužinome daug, bet ją reikia teisingai traktuoti.

1) Kai $x = 0$, ši lygybė iš viso nieko neduoda – ji teisinga bet kuriai funkcijai $f(x)$.

2) Nagrinėkime reikšmes $x \neq 0$. Tada $f(x)[f(x)-1] = 0$. Ir čia svarbiausia suvokti, kad tai visiškai nereiškia, jog $f(x) = 0$ visiems $x \neq 0$ ar $f(x) = 1$ visiems $x \neq 0$. Tai reiškia tik tiek – kiekviename taške $x \neq 0$ turime arba $f(x) = 0$, arba $f(x) = 1$, o tokių funkcijų yra be galo daug. Bet kurios iš jų grafiko taškai su $x \neq 0$ „tupi“ tiesėse $y = 0$ ir $y = 1$; pavyzdžiui, tai gali būti ne tik funkcijos $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$, bet ir funkcija $f(x) = \{0,\ \text{kai}\ x < 0; = 1,\ \text{kai}\ x \geqslant 0\}$, funkcija $f(x) = \{1,\ \text{kai}\ x \in (0; 1); = 0\ \text{kitur}\}$, ir t. t., ir pan.

Šis sunkumas čia įveikiamas taip. Tarkime, kad kuriame nors (bent viename!) taške $x_0 \neq 0$ yra $f(x_0) = 0$. Tada pradinė lygybė su $x = x_0$ duoda $x_0 \cdot f(y) + y \cdot 0 = (x_0 + y) \cdot 0 \cdot f(y)$, t. y. $x_0 f(y) = 0$. Bet $x_0 \neq 0$, todėl *visiems* y bus $f(y) \equiv 0$ (tai tas pat, kas ir $f(x) \equiv 0$). Funkcija $f(x) \equiv 0$ akivaizdžiai tenkina pradinę lygtį.

Lieka atvejis, kai kiekviename srities $x \neq 0$ taške $f(x) \neq 0$. Tada $f(x) = 1$ visuose taškuose $x \neq 0$. Todėl reikia tikrinti funkcijas $f(x) = \{1,\ \text{kai}\ x \neq 0; = C,\ \text{kai}\ x = 0\}$.

Jos turi pradinę lygtį versti teisinga lygybe su visomis poromis (x, y). Kai $x = 0$, $y \neq 0$, turime $0 \cdot 1 + y \cdot C = (0 + y) \cdot C \cdot f(y)$, t. y. tapatybę $y \cdot C = y \cdot C \cdot 1$. Kai $x \neq 0$, $y = 0$, gauname tą patį. Kai $x \neq 0$, $y \neq 0$, turime tapatybę $x + y = (x + y) \cdot 1 \cdot 1$. Kai $x = 0$, $y = 0$, turime $0 + 0 = 0$. Vadinasi, bet kuri funkcija $f(x) = \{1,\ \text{kai}\ x \neq 0; = C,\ \text{kai}\ x = 0\}$, yra sprendinys.

Atsakymas. Be galo daug funkcijų: $f(x) \equiv 0$ ir $f(x) = \{1,\ \text{kai}\ x \neq 0; = C,\ \text{kai}\ x = 0\}$, $C \in \mathbb{R}$.

Antras būdas. Bandykime spręsti kitaip. Imkime $y = 0$: $xf(0) = xf(x)f(0)$, t. y. $xf(0)[f(x) - 1] = 0$. Jeigu yra taškas, kur $f(x) = 1$ (t. y. yra toks x_0, kad $f(x_0) = 1$), tai iš pradinės lygybės $x_0 f(y) + yf(x_0) = (x_0 + y)f(y)$, arba $x_0 f(y) + y = (x_0 + y)f(y)$, arba $y = yf(y)$, o tai reiškia, kad $f(y) = 1$, jei tik $y \neq 0$ (t. y. $f(x) = 1$, jei tik $x \neq 0$). Jeigu $f(x) \neq 1$ su visais x, tai $xf(0) = 0$, o tai reiškia, kad $f(0) = 0$. Tai ir viskas, ką taip pavyksta gauti. Vadinasi, reikia ieškoti kitų kelių.

Trečias būdas. Po visų vargų paaiškėja, kad trumpiausias sprendimas būtų toks (beje, čia ir loginių sunkumų beveik nėra).

Imkime $x = y = 1$, tada $2f(1) = 2f^2(1)$, t. y. reikia išnagrinėti du atvejus: 1) $f(1) = 0$; 2) $f(1) = 1$.

1) Jei $f(1) = 0$, tai į pradinę lygtį įstatome $y = 1$, tada $f(x) \equiv 0$ (tikriname – tinka).

2) Jei $f(1) = 1$, tai įstatome $y = 1$, tada $xf(x) = x$, t. y. $x[f(x) - 1] = 0$. Iš čia $f(x) = 1$, kai $x \neq 0$, ir reikia patikrinti funkcijas $f(x) = \{1,\ \text{kai}\ x \neq 0; = C,\ \text{kai}\ x = 0\}$. Visos jos tinka (tikrinome anksčiau). Dabar jau galime rašyti atsakymą (žr. aukščiau).

Pademonstruosime, kaip daug gali pasikeisti funkcinės lygties uždavinio atsakymas vos vos pakitus uždavinio sąlygai. Žinoma, norint tai pajusti, reikia būti susipažinusiam su Koši funkcinėmis lygtimis. Tai padaryti nesunku kad ir remiantis šaltiniais [3, 4] ar [2].

4 pavyzdys. Įsivaizduokime tokią sąlygą.

Išspręskite funkcinę lygtį

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{$*$}$$

Kaip jau pasakyta, ji reikštų tokį uždavinį:

Raskite visas $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Pasakysime tik tiek, kad šis uždavinys šiandien išspręstas dar ne iki galo. Pereikime prie atskirų uždavinio variantų.

4^{I} *pavyzdys. Raskite visas* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais natūraliaisiais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{R}$.

4^{II} *pavyzdys. Raskite visas* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais natūraliaisiais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{N}$.

4^{III} *pavyzdys. Raskite visas aprėžtas* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x) \equiv 0$.

4^{IV} *pavyzdys. Raskite visas aprėžtas* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Atsakymas. Tokių funkcijų nėra.

4^V *pavyzdys. Raskite visas* $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais racionaliaisiais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x)=kx$, $k\in\mathbf{R}$.

4^{VI} *pavyzdys. Raskite visas aprėžtas* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x)\equiv 0$.

4^{VII} *pavyzdys. Raskite visas monotoniškas* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x)=kx$, $k\in\mathbf{R}$.

4^{VIII} *pavyzdys. Raskite visas griežtai monotoniškas* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x)=kx$, $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

4^{IX} *pavyzdys. Raskite visas tolydžias* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *tenkinančias lygtį* $(*)$ *su visais* x *ir* y.

Atsakymas. $f(x)=kx$, $k\in\mathbf{R}$.

Ir pagaliau – (siur)prizas skaitytojui, įveikusiam šį straipsnelį. Išspręskite 5 pavyzdį neskaitydami ir nežiūrėdami į atsakymą. Jei pavyks – rašykite man e-adresu juozas.macys@mii.vu.lt (užtenka atsiųsti atsakymą). *Kengūros* buveinėje teisingai išsprendusių lauks autoriaus knygelių ryšulėlis.

5 pavyzdys. *Raskite visas funkcijas* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *kurios su visais* x *tenkina lygtį*

$$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4.$$

Sprendimas. Galima spręsti lygtį tiesiogiai – atlikus keitinį $x\to 1-x$. Deja, „algebra“ pasidaro per daug sudėtinga – be kompiuterio tam gali prireikti kelių dienų.

Lengviausia uždavinį spręsti taip.

Dėmuo x^4 sąlygoje leidžia spėti, kad jeigu yra polinominių sprendinių, tai jų laipsnis $\leqslant 2$, t. y. ieškome pavidalo $f(x)=ax^2+bx+c$ sprendinių. Tada $x^2(ax^2+bx+c)+a(1-x)^2+b(1-x)+c=2x-x^4$, iš čia $a=-1$.

Imame $x=0$: $a+b+c=0$, $b+c=1$. Imame $x=1$: $a+b+c=1$, $b+2c=2$.

Taigi $c=1$, $b=0$, todėl $f(x)=1-x^2$ yra sprendinys. Raskime visus sprendinius. Atlikime keitimą $f(x)=1-x^2+g(x)$: $x^2(1-x^2+g(x))+1-(1-x)^2+g(1-x)=2x-x^4$,

$$x^2g(x)+g(1-x)=0. \tag{1}$$

Šią lygtį spręsti nepalyginamai lengviau nei pradinę. Keičiame $x\to 1-x$: $(1-x)^2\times g(1-x)+g(x)=0$. Ją atimame iš ankstesnės, padaugintos iš $(1-x)^2$: $[x^2(1-x)^2-1]\times g(x)=0$, $(x^2-x-1)(x^2-x+1)g(x)=0$. Bet $x^2-x+1>0$, todėl

$$(x^2-x-1)g(x)=0. \tag{2}$$

Raskime $x^2-x-1=0$ šaknis: $x_1=(1-\sqrt{5})/2$, $x_2=(1+\sqrt{5})/2$. Bet kuriai šakniai teisinga lygybė $(1-x)x=-1$ (tuo naudosimės toliau). (2) lygties sprendiniai yra $\{g(x)=c_1$, jei $x=x_1;=c_2$, jei $x=x_2(=1-x_1);=0$ kitur$\}$. Kadangi lygtis (2) neekvivalenti (1), tai sprendinius tikriname įstatydami į (1) lygtį. Taške x_1 ir taške $1-x_1$ gauname (kitur gauname tapačius nulius):

$$\begin{cases}x_1^2c_1+c_2=0,\\(1-x_1)^2c_2+c_1=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}c_2=-x_1^2c_1,\\(1-x_1)^2x_1^2c_1-c_1=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}c_2=-c_1x_1^2,\\c_1-c_1=0.\end{cases}$$

Vadinasi, kai $c_2 = -c_1x_1^2$, tai sprendiniai tiks: $g(x) = \{c_1,$ kai $x = x_1; = -c_1x_1^2,$ kai $x = 1-x_1; = 0$ kitur$\}$. Taigi $f(x) = 1-x^2+g(x) = \{1-x^2+C,$ kai $x = (1-\sqrt{5})/2; = 1-x^2-C(3-\sqrt{5})/2,$ kai $x = (1+\sqrt{5})/2; = 1-x^2$ kitur$\}$.

„Dėl gražumo“ galima pakeisti $C \to 2C$.

Atsakymas. $f(x) = \{1-x^2+2C,$ kai $x = (1-\sqrt{5})/2; = 1-x^2+C(\sqrt{5}-3),$ kai $x = (1+\sqrt{5})/2; = 1-x^2$ kitur$\},\ C \in \mathbf{R}$.

Literatūra

[1] A. Apynis. *Funkcinės lygtys* (Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, 5 užduotis), 2008–2010. Adresas internete: www.mif.vu.lt/ljmm (Užduotys. Užduočių archyvas).

[2] J. Mačys. Susipažinkite: funkcinės lygtys. *Alfa plius omega*, **1**(7):5–28, 1999.

[3] P. Kantautas, L. Melninkas, P. Simonaitis ir P. Šarka. *Matematikos knyga.* Adresas internete: olimpiados.lt (Matematikos knyga).

[4] L.M. Lichtarnikov. *Elementarnoe vvedenie v funkcionalnye uravneniya*, 1997. Adresas internete: http://www.twirpx.com/file/428709/.

SUMMARY

Functional equations in the secondary school

J.J. Mačys

Secondary school in Lithuania goes over to modules in the mathematics syllabi. Teachers need various proof methods for solving problems of more complicated (olympiad) modules. The paper discusses the module of functional equations. The books and papers dealing with this question are pointed out. Some typical solving errors are discussed.

Keywords: mathematics syllabi, functional equations, olympiads.