Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 134–139 www.mii.lt/LMR/

Kelios paprastos pastabos apie „Kengūros“ grožį ir naudą

R. Rudalevičienė[1], **R. Kašuba**[2]

[1] *Vilniaus „Ryto“ vidurinė mokykla*
D. Gerbutavičiaus 9, LT-04320 Vilnius
[2] *Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: lmma.valdyba@gmail.com; romualdas.kasuba@mif.vu.lt

Santrauka. „Kengūros“ judėjimui pasaulyje ir Europoje priskaičiuojami vos keli dešimtmečiai. To judėjimo vertės ir naudos dabar jau niekas neginčija. Tačiau patys „Kengūros“ uždaviniai ir kiti su jais susiję natūralūs dalykai yra menkai teoriškai įprasminti. Mokslinėje literatūroje straipsnių „Kengūros“ uždavinių tematika negausu. Todėl kiekvienas bandymas ką nors pasakyti turi prasmę ir reikšmę.

Raktiniai žodžiai: „Kengūros“ konkursas, matematinis ugdymas, mokyklinė metodika, užduočių natūralumas ir patrauklumas, užduočių individualizacija.

Kalbos apie grožį ir naudą yra tokios senos, kad kartais regisi ir už tą pasaulį senesnės.

Jos yra labai natūralios, nes jeigu jau ką nors veikiame, tai visada sąmoningai ar nesąmoningai keliame klausimą, ar tai, ką aš darau, yra kam nors naudinga. O toliau, visai šalia į galvą lenda ir kitas klausimas, ar tai, ką aš darau, aš darau gražiai.

Jei kas to žodžio privengia, nes labai jis dabar labai eksploatuojamas, gali vartoti žodį efektyvus.

Taigi bet kurioje veikloje yra du pamatiniai klausimai:

(A) Ar mano veikimas yra naudingas?

(B) Ar mano veikimas yra gražus (profesionalus, efektyvus, pagavus)?

Pakalbėkime apie „Kengūros“ grožį ir naudą.

Pasižiūrėkime į tokį Kengūros uždavinį. Jis buvo pasiūlytas pačioje pirmojoje „Kengūros“ konkurso lietuviškos versijos laidoje, kurioje tolimaisiais 1999 metais dalyvavo keli šimtai Vilniaus miesto ir keliolika Raseinių Žemaičio gimnazijos moksleivių.

Tai paskutinis, 30-tas Bičiulio grupės uždavinys arba vienas iš rimčiausių uždavinių, kurie tais 1999 metais buvo siūlomi 5 ir 6 klasių mokiniams.

B30. Elektroninis laikrodis rodo valandas, minutes ir sekundes. Dabar yra 19:58:47. Šitame užraše visi skaitmenys skirtingi. Po kiek sekundžių pirmą kartą pasikartos panaši situacija, t. y. vėl visi skaitmenys bus vėl visi skirtingi?

(A) 40; (B) 73; (C) 156; (D) 157; (E) 898.

Dabar paklauskime savęs kartu su mokiniu, nelyginant mes būtume „įšokę į mokinio kailį“, ką gi man čia daryti, jeigu aš esu tik vos vos gudrus – bet ne mažiau? Aš noriu mokytis, noriu suprasti, kitaip nebūčiau griebęs paskutinio uždavinio, ambicijų aš turiu, savigarbos irgi, na gal tik patirties šiek tiek mažiau. Na dėl patirties, tai mokytoja man ne kartą sakė, kad ji yra „užgyvenamas“ reikalas.

Taigi, ką man daryti? Ką man daryti, jeigu aš norėčiau turėti naudos iš uždavinių sprendimo? Ir dar, žinoma, aš norėčiau, nors garsiai paklaustas aš gal ir neprisipažinsiu, kad sprendžiant dar kur nors „pasidarytų gražu“, na gal ne taip aiškiai gražu, kaip kad būna turistaujant – eini, eini ir kad atsivers koks skardis ar slėnis, tai tik ir žiūrėk, kad nesustotum ir neužsižiopsotum.

Taip ir pats Maironis rašė apie tai, kas nutinka „teisingai turistaujant“:

Atsikvėpęs giliai krūtine,
Kai nuo kalno pažvelgsi aplinkui,
Tai tik plunksna rašyt auksine
Pavesta Lietuvos dailininkui!

Nes eiti vis tiek reikės. Tai tikrai gerai būtų, kad einant pakeliui kartais būtų gražu. Visai kaip ir visur kitur gyvenime.

Taigi kaip čia mums spręsti ir ką čia mums daryti, jeigu mes esame labai kuklūs ir turime mažokai patirties?

Na visi, kas yra dalyvavę Kengūros konkurse, žino, kad ten yra pateikiami 5 siūlomi variantai, iš kurių tik vienas vienintelis variantas yra teisingas. Vienas vienintelis, kiti keturi atsakymai yra ne tokie geri, o, paprastai sakant, visai neteisingi.

Pirmasis atsakymas, kuris yra 40, siūlo laiką, kuris bus po 40 sekundžių. Bet dar keturiasdešimčiai sekundžių nepraėjus, nes jau po 13 sekundžių, mes „įžengsime“ į tą paskutinę 60-tą devynioliktos valandos minutę, arba į laikus, kurių užrašai yra 19:59:XY, ir joks iš tokių laikų mums netinka, nes tokiame laiko užraše yra sutampančių skaitmenų – jame visą laiką yra du devynetai – vienas – valandų, o kitas – minučių. Būdami nuoseklūs bebandydami atsakymus galime išbandyti dar ir kitą atsakymą – 73 sekundes. Mes dar nepamiršome iš mūsų stambinimo patirties, kad tai yra tas pats kaip 1 min. 13 sek.

Apskritai nejučia nežiūrėdami pastebime, kad jeigu pradžioje buvo 19:58:47, tai po 13 sekundžių „keitėsi minutės“, ir pasidarė 19:59:00, vadinasi, dar po minutės bus visai rimti pokyčiai, nes bus 20:00:00.

Ima truputėlį pabosti tikrinti – nes pirmieji du atsakymai, matyt, labiau tiko tikrojo atsakymo paslėpimui.

O dabar atsakykime į natūraliai kylantį klausimą: tai negi tas tikrinimas taip jau ir nedavė jokios apčiuopiamos naudos? Davė, ir nemažai, jis kaip spustelėjęs šaltukas per mankštą privertė mus pajudėti, mes apšilome ir suvokėme, kaip skaičiukai „vaikšto“.

Dabar mes jau be jokio tikrinimo aiškiai suvokiame, kad joks laikas iki to mūsų didelio virsmo, arba iki 20:00:00 mums tikrai netiks, nes po 19:58:47 eis 19:58:48 (2 vienodi skaitmenys), dar po sekundės, kai bus jau 19:58:49 (vėl du vienodi rodmenų skaitmenys), dar toliau – nedidelis virsmas, nes 19:58:50 ir iki pat 19:58:59 mažiausiai dviejų skaitmenų sutapimas yra garantuotas.

Po didėlesnio virsmo pasidaro 19:59:00 ir dabar tą ištisą minutę visi skaitmenys tikrai neišsiskiria iki pat 20:00:00.

Na, o dabar mums atsiriša rankos ir mes gana nesunkiai, nes pakeliui įgijome nemenkos patirties, konstruosime patį mažiausią laiką iš pačių mažiausių dar neužimtų skirtingų skaitmenų 1, 3, 4, 5 – primename, kad dabar aštunta valanda vakaro ir skaitmenys 0 ir 2 „paimti valandų rodymui“. Iš 1, 3, 4 ir 5 natūraliai susideda skaičiuojant minutėmis ir sekundėmis „mažiausias laikas“ 13:45 ir prijungus jį prie valandų turėsime 20:13:45, kuris turėtų būti geras atsakymas – tik dar reikia paversti jį sekundėmis. Tai visai paprasta, nes 13 min. 45 s yra $13 \cdot 60 + 45$ arba 825 sekundės ir dar prijungus tas 73 sekundes nuo pat pradžių iki didžiojo laiko virsmo (20:00:00) gauname 898 sekundes, arba, kad teisingas yra iš pirmo žvilgsnio tokiu egzotišku atrodęs atsakymas (E).

Pastebėkime, kad grynajam spėliotojui šiame uždavinyje buvo siūlomas dar vienas akligatvis, nes buvo du praktiškai vienodi atsakymai C ir D, o tai dažnai reiškia, kad būtent iš tų 2 atsakymų vienas kuris yra teisingas.

Na bet nesistebėkime, kad čia net ne vienas, o keli galimi kabliukai, nes tai, kaip sakyta, yra paskutinis uždavinys, o penktokų ir šeštokų protai yra aštrūs, suvokimo greitis didžiulis ir todėl reikia siūlyti taip rimtai, kaip tik beįmanoma.

Ko mes išmokome spręsdami šį uždavinį? Pirmiausiai – nebijoti „juodo“ darbo, liestis prie bet kokio skaičiaus ar paprasčiausiai pamatėme, kad tikrinti atsakymus visiškai „ne gėda“, mes juk irgi kukliai ir kantriai tai darėme – užtat ir daug išmokome.

Dar vienas dalykas, ką mes suvokėme, kad ir per vieną sekundę padėtis gali pasikeisti – truputį ir net (sunku praktiškai nesusidūrus tai suvokti) – labai smarkiai.

Čia kaip ir gyvenime ar kokio stipraus uždavinio sąlygoje – vienas žodis gali viską apversti aukštyn kojom.

Kad iš karto pailiustruotume tai, ką mes pasakėme, siūlome uždavinį, kuris nuo B30 skiriasi „vienu žodžiu“.

Pasižiūrėkite.

Elektroninis laikrodis rodo valandas, minutes ir sekundes. Dabar yra 19:58:47. Šitame užraše visi skaitmenys skirtingi. Po kiek sekundžių pirmą kartą pasikartos panaši situacija, t. y. vėl visi skaitmenys bus vėl visi tie patys?

Čia skeptiškesnis žmogus nejučia galėtų prisiminti paplitusį posakį, kad vienas paikas žmogus (mes formuluojame švelniau) gali sugalvoti per 1 minutę 10 klausimų, į kuriuos iš karto nerastų atsakymo ir 100 išminčių.

Aritmetikoje tuo požiūriu yra truputį kitaip – šioje vietoje aritmetika gal ir skiriasi nuo kitų rimtųjų menų tuo, kad paikų klausimų aritmetikoje beveik neįmanoma sugalvoti, nes čia į praktiškai kiekvieną klausimą – gal su skaičiuokliu ar kompiuteriu galima atsakyti.

O tų klausimų, kad ir po šio uždavinio pasipila kaip iš gausybės rago: pavyzdžiui, kad ir tokie:

Koks trumpiausias laikas praeina tarp dviejų laikų, kurie yra užrašomi visais skirtingais skaitmenimis (nebūtinai tais pačiais)?

Koks trumpiausias laikas praeina tarp dviejų laikų, kurių užraše visi skaitmenys yra skirtingi, bet abiejuose tie patys?

Kiek yra „laikų“, užrašomų visais skirtingais skaitmenimis?

Atrodo taip paprasta, o ką gi man daryti?

Gyvendami mes labai dažnai, tikrai dažniau kaip kartą per mėnesį, mes būname panardinami į tokias padėtis, kai viskas atrodo paprasta, o iš kur griebti atsakymą arba bent susigaudymą, ką daryti šitą ir sekančią sekundę – nežinia ir nežinia iš kur tos žinios galima būtų laukti.

Skaitytojas galėtų pasakyti, kad visa tai tiesa, bet kuo gi čia dėta „Kengūra“, tas švelnus konkursas? Čia juk vienintelis sunkumas ne tiek uždavinių sudėtingumas, o jų gausa; per tą gausą sunkiau suspėti ramiau susidėlioti atsakymus.

Tačiau ne visi to konkurso uždaviniai taip paprastai gliaudomi ir ne visi sunkumai kyla dėl uždavinių gausos. Dalis sunkumų gali kilti ir dėl uždavinių turinio, kuris ne visada būna sudėtas iš vieno atomo, arba vieno teiginio.

Pavyzdžiu galėtų būti toks uždavinys, kurio, mūsų nuomone, negalima išspręsti vieniu sakiniu.

Tai mūsų pirmosios lietuviškosios Kengūros 1999 metų Senjoro ir Junioro grupių uždavinys (J27 ir S26).

Kiek daugiausiai poaibių, turinčių ne daugiau kaip po 3 elementus, galima sudaryti iš septynelementės aibės taip, kad bet kurie du jos poaibiai turėtų po lygiai vieną bendrą elementą?

Siūlomų atsakymų puokštė sudaryta iš penkių atsakymų, prasidedančių nuo 3, toliau „proteguojami“ iš eilės tokie atsakymai: 5, 6, 7 ir galiausiai atsakymas 9.

Visada galima pridurti, kad rimtesni uždaviniai, tiek matematikoje, tiek ir gyvenime yra vaizdingas auklybos momentas, demonstruojantis, kad kraštovaizdis susideda net tik iš lygumų, bet pasitaiko ir gaubrėtų vietų, o būna kad ir gana aukštų kalnelių.

Skaičių kraštovaizdžio tolybių palyginimui labai neblogai tinka, kad ir toks to paties ir tų pačių metų konkurso Senjoro grupės 30 uždavinys. Jame minimi skaičiai yra tokie, kad realiame gyvenime eidamas gatve ką nors panašaus ne kasdien sutiksi. Na ką gi, kartais gerai yra suvokti, kad būna ir stambesnių žvėrių. Ir pasirodo, kad juos pamačius įmanoma susigaudyti, kaip reikia elgtis.

Visi mes dažnai esame buvę teatre, bet gal ne visi esame matę, kaip dirba teatro sufleris, kuris, kaip mums daug yra tekę skaityti klasikinėse knygose, įsitaisęs šiek tiek žemiau negu pirmoji eilė, seka tai, kas yra sakoma scenoje, ir prireikus išraiškingai primena tuos žodžius, kurie po sekundės nuskambės scenoje jau pilnu garsu, bet jau nebe iš suflerio, o iš visų numylėto aktoriaus lūpų.

Sakoma, kad teatro sufleriai šnabžda labai išraiškingai, tyliai ir efektyviai.

Su kažkuo labai panašiu susiduriame ir mes, mokytojai, klausinėdami savo mokinius arba darydami tai, kas kasdienėje kalboje vadinasi „užvedimu ant kelio“.

Su tokiais „užvedinėjimo ant kelio“ elementais mes esame susidūrę jau klausinėdami pačių paprasčiausių apibrėžimų ar „plikų faktų“, kur jau atrodytų, be sausų formalių atsakymų daugiau nieko įdomesnio negali vykti – rodytųsi, kad būna tik taip: arba mums atsako, arba neatsako.

O vis dėlto paklausykite:

Įsivaizduokite, kad Jūs klausiate mokinio (galima ir studento), kas yra lygties sprendinys. Absoliuti dauguma žmonių be jokio vargo atsako į šį klausimą teisingu vadovėliniu sakiniu, kad tai toks skaičius, kuris įrašytas kur nors duoda ką nors, arba, atsiprašome, teisingą lygybę.

Na, bet įsivaizduokite sau, kad žmogus to sakinio pasakyti negali, nes gal jis jį skaitė ne vakar, arba ne iš tokios įtikinamos knygos. Ir dar tarkime, kad Jūs esate pasiryžę iš jo tą atsakymą išgirsti arba „išgauti“.

Ką Jūs galėtumėte daryti?

Juk nesakysime tokiam žmogui, kaip „tu drįsti nežinoti šitokio atsakymo?“, nors ištarus tokius žodžius su šypsena, jų poveikis tikrai būtų geras.

Mūsų praktikoje mes esame darę ir rezultatai būna pritrenkiančiai geri, būtent esame klausę „labai konstruktyviai“:

Kuo skiriasi skaičius, kuris yra lygties sprendinys nuo skaičiaus, kuris nėra tos lygties sprendinys?

Siūlytume ir Jums taip pabandyti, nes tai truputį daugiau, kaip kad klausimo pakartojimas.

Lygiai toks pats panašus klausimas, kuris nėra vien dvigubas pakartojimas, būtų įmanomas ir paklausus, sakysime, kas tai yra trikampio pusiaukampinė.

Jei negausite atsakymo, kad tai kažkas, dalijantis nurodytą kampą pusiau, toliau galėtumėte klausti, pavyzdžiui, vėl panašiai: „Kuo skiriasi pusiaukampinės taškas (taškas, esantis ant pusiaukampinės), nuo taško, kuris to kampo pusiaukampinei nepriklauso?“

Ir Jūs daug dažniau, o gal ir visada išgirsite kažką daug aiškesnio apie dviejų atstumų sutapimą arba nesutapimą.

Tokią pedagoginio meistriškumo formą, kaip kad ką tik aptartąją, galėtume vadinti „*nepastebimąja pagalba*“.

Sprendžiant Kengūros uždavinius ar aiškinant jų sprendimus tokios *nepastebimosios pagalbos* efektyvumas kartais gali pasireikšti stačiai stulbinančiai.

Įsivaizduokite, kad Jūs sprendžiate uždavinį, kuriame Jums reikia suskaičiuoti, kiek yra dviženklių skaičių, kurių skaitmenų sumos skaitmenų suma – su kiekvienu dviženkliu skaičiumi atliekame dvi operacijas! – yra lygiai 1.

Pagalvokite, kaip čia būtų galima suteikti *nepastebimąją pagalbą*. Matyt, pačiais įvairiausiais būdais. Pati gražiausia tokios pagalbos suteikimo forma, kurią mes esame matę, buvo tokia – paskaitykite žemiau, gal ir Jums patiks!

Kiek yra dviženklių skaičių, kurių skaitmenų suma yra lygi 1 arba 10?

Neblogai pradedama, ar ne tiesa?

Dabar sprendimas „žaibiškas“, kaip ir dera kengūriškam uždaviniui, kur vidutiniškai vienam uždaviniui skiriama „pusantro šimto sekundžių“.

Iš tikrųjų, tie skaičiai, kurių skaitmenų suma yra 10, ir yra būtent tie skaičiai, kurių skaitmenų sumos skaitmenų suma yra lygi 1.

O tokių dviženklių skaičių su skaitmenų sumos skaitmenų suma 1 arba skaitmenų suma 10 yra tiksliai tiek, kiek mes žemiau, daug nekalbėdami, ir išvardinsime:

10 ir dar 19, 28, 37, 46, 55, 64, 72, 82 ir 91.

Taigi jų esama pilnos dešimties.

Dėl „Kengūros“ uždavinių praktinės naudos šių dienų mokykloje pirmiausiai pasakytini štai kokie dalykai:

1. „Kengūros“ konkurso uždaviniai realiai dirbančiam mokytojui yra dar neatrasti „klodai“ bei dideli rezervai.
2. „Kengūros“ uždaviniai gali būti pačiais įvairiausiais būdais plėtojami, adaptuojami, koreguojami ir pritaikomi pagal kiekvieno mokinio interesus ir galimybes.
3. „Kengūros“ konkurso uždaviniai sudaro natūralią ir ženklią besivystančią terpę, kone idealiai pritaikytą pedagoginio ir kūrybinio darbo elementų mokykloje plėtrai ir individualizavimui.

Literatūra

[1] V. Dagienė and R. Kašuba. “Kangaroo” and “Beaver” – the contests for all pupils to be more interested in mathematics and informatics. In *Creativity in Mathematical Education and the Education of Gifted Students.* Proceedings, ISBN 9789984453606, pp. 56–61, Riga, Latvia, 2011.

SUMMARY

Several simple remarks concerning the attractiveness and usefulness of “Kangaroo” problems

R. Rudalevičienė, R. Kašuba

In the paper some aspects of natural attractiveness and practical usefulness of “Kangaroo” problems for individual students and for the teaching of math are discussed.

Keywords: “Kangaroo” competition, mathematical education, school didactics, naturalism of tasks, attractiveness of tasks, individualization of tasks.