Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
52 tomas, 2011, 156–160 www.mii.lt/LMR/

Aleksandro Dambrausko naujosios trigonometrinės sistemos

Nijolė Kalinauskaitė

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: n.kalinauskaitė@ktl.mii.lt

Santrauka. Pateikiamas Aleksandro Dambrausko požiūris į trigonometrinių funkcijų nusakymo galimybes per trigonometrinių linijų sistemas.

Raktiniai žodžiai: trigonometrinės funkcijos, trigonometrinės linijos.

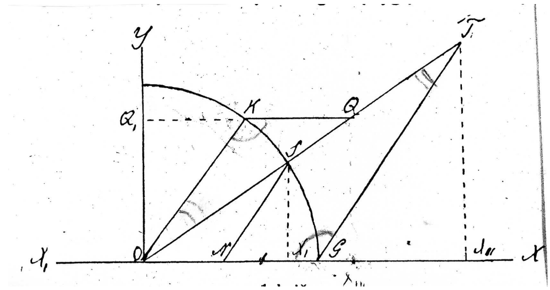
Apie Aleksandrą Dambrauską (slap. Adomas Jakštas) 1917 m. Stasys Šalkauskis rašė „Jis atsidėjo visiems gyviausiems ir labai įvairiems jaunos lietuvių kultūros reikalams. Todėl mes matome jį visur užimtą visada labai reikalingu, bet dažnai nedėkingu darbu. Nežinia kuo reikia labiausiai jame stebėtis: jo neišsenkama energija, ar jo prigimtimi, tiek gausiai ir įvairiai apdovanota. Nuoširdus poetas ir užsidegęs matematikas, karštas lietuvių kalbos kovotojas ir įsitikinęs esperanto šalininkas, teologas ir filosofas, jis yra viena iš didingiausių tautinio lietuvių atgimimo asmenybių“. Šiame darbe pažvelkime į jo, kaip matematiko, veiklą.

Aleksandras Dambrauskas gimė 1860 m. rugsėjo 8 d. Kauno gubernijos, Ukmergės apskrities, Pagirių valsčiaus Kuronių kaime karališkųjų valstiečių šeimoje. Tėvo brolio kunigo Stanislovo Dambrausko globojamas, 1872 m. pavasarį baigė valdišką liaudies mokyklą Kriūkuose ir rudenį įstojo į Šiaulių gimnazijos pirmąją klasę. 1880 m. baigęs gimnaziją, įstojo į Peterburgo universiteto Fizikos-matematikos fakultetą studijuoti matematikos. 1881 m. pradžioje (kovo 5 d. senuoju stiliumi) iš universiteto išstojo ir pradėjo mokytis Kauno kunigų seminarijoje. 1888 m. baigė Peterburgo Romos katalikų dvasinę akademiją ir buvo įšventintas kunigu.

XX amžiaus pradžios lietuvių matematinėje raštijoje A. Dambrauskas užima svarbią vietą. Jis yra parašęs vadovėlių ir paskelbęs eilę mokslinio pobūdžio darbų bei straipsnių.

Bene svarbiausias originalus A. Dambrausko darbas yra knygelė „Naujosios trigonometrinės sistemos“. Pirmieji rezultatai buvo paskelbti knygelėje [3], esperanto kalba, išleistoje 1906 m. Berlyne, kuri 1908 m. buvo išversta į prancūzų kalbą [4]. 1922 m. buvo atspausdintas praplėstas šios knygelės leidimas [5] lietuvių kalba. Tai knygų Leidimo komisijos leidinys pavadinimu A. Jakšto „Naujos trigonometrinės sistemos“ su paantrašte (bandymas filosofiškai nušviesti trigonometrijos pagrindus), išspausdintas Otto Elsnerio spaustuvėje Berlyne.

Prakalboje autorius nurodo, kad šie tyrinėjimai yra bandymas atsakyti į klausimą, kas yra dabar vartojamoji trigonometrija: ar ji vienintelė galima, ar dar esama ir kitų trigonometriškų sistemų, ir kad pirmuosius šešis naujų trigonometrinių sistemų pavyzdžius, jis jau žinojo 1902 metais. Prie pagrindinių trigonometrinių linijų:



1 pav.

sinusinės, kosinusinės, tangentinės, kotangentinės, sekantinės ir kosekantinės pridėjus dar apskritimo spindulį bei sinusinės ir kosekantinės linijų kampą ρ, gauname aštuonis dydžius, iš kurių parinkę du pastovius gausime $\binom{8}{2} = 28$ trigonometrines sistemas. Šias sistemas A. Dambrauskas pavadino elementariosiomis. Laikydamas tik vieną iš tų dydžių pastovų, o kitus susietus algebrine lygtimi, atitinkančia plokštumos kreivę, gauna neribotą skaičių naujų trigonometrinių sistemų. Jas autorius pavadino sukrautinėmis. Atrodo, kad A. Dambrauskas nesiekė nustatyti trigonometrinių funkcijų reikšmių, o tik pagrindė galimybę nusakyti trigonometrinių linijų sistemą, kurių santykiai ir yra trigonometrinės funkcijos.

Trumpai aptarsime minėtosios knygelės turinį. Pagrindinis brėžinys būtų 1 pav.

Pagrindinės trigonometrinės linijos yra šios. Sinusinė $SN = s$, kosinusinė $ON = c$, tangentinė $OG = t$, kotangentinė $KQ = k$, sekantinė $OT = z$, kosekantinė $OQ = q$, spindulys $OS = OG = \rho$ ir sinusų krypties kampas φ, o jų santykiai (trigonometrinės funkcijos) nusakomi šiomis, pasak autoriaus, pamatinėmis lygybėmis

$$\mathrm{Sin} = \frac{s}{\rho}, \qquad \mathrm{Tg} = \frac{t}{\rho} = \frac{s}{c}, \qquad \mathrm{Sec} = \frac{z}{\rho} = \frac{\rho}{c},$$
$$\mathrm{Cos} = \frac{c}{\rho}, \qquad \mathrm{Cotg} = \frac{k}{\rho} = \frac{c}{s}, \qquad \mathrm{Cosec} = \frac{q}{\rho} = \frac{\rho}{s}.$$

Elementarioji trigonometrinė sistema, žymima raide **S** jos viršuje ir apačioje nurodant fiksuotąsias trigonometrinių dydžių reikšmes. Pvz., trigonometrinė sistema, kai $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$, žymima $\mathbf{S}^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$.

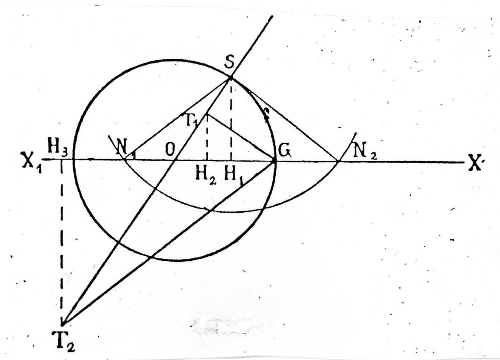
Pirmame knygos skyriuje, įvedami šie pažymėjimai, aptariamos 28 naujos trigonometrinės sistemos, ir kaip pavyzdys panagrinėta sistema $\mathbf{S}^{\rho=1}_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}$, nurodant jos kai kurių trigonometrinių funkcijų sąryšių skirtumus, lyginant su sistema $\mathbf{S}^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$.

Būtent,

$$\mathrm{Sin}^2\left(\alpha, \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{Cos}^2\left(\alpha, \frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \mathrm{Sin}\left(\alpha, \frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{Cos}\left(\alpha, \frac{2\pi}{3}\right)$$

ir $\mathrm{Sec}^2(\alpha, \varphi) - \mathrm{Tg}^2(\alpha, \varphi) = 1 - \mathrm{Tg}(\alpha, \varphi)$, o ne $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sec^2 - \mathrm{tg}^2\,\alpha = 1$, kaip sistemoje $\mathbf{S}^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$.

Taip pat pateiktos sinusų, kosinusų ir tangentų pakeitimo vienų kitais bei $\mathrm{Sin}(\alpha \pm \omega, \varphi)$, $\mathrm{Sin}(2\alpha, \varphi)$ formulės, kurios irgi yra sudėtingesnės.



2 pav.

Parinkus trigonometrinėje sistemoje $\mathbf{S}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ du trigonometrinius dydžius (linijas, kampą ar spindulį) pastovius, gaunamos $\binom{8}{2} = 28$ elementariosios trigonometrinės sistemas. Visoms šioms sistemoms yra surastos taškų $\mathbf{S}$ ir T geometrinių vietų lygtys.

Pasvarstęs, kuri trigonometrinė sistema $\mathbf{S}^{\rho=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ ar Ptolemėjaus $\mathbf{S}^{\rho=1}_{c=1}$ patogesnė, ieško dar geresnės, duodančios savitas trigonometrines linijas. Kaip pavyzdžius smulkiau panagrinėja elementarias sistemas $\mathbf{S}^{s=h}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ ir $\mathbf{S}^{t=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ bei sukrautines $\mathbf{S}^{\rho^2-c^2=d^2}_{z^2-t^2=g^2}$ ir $\mathbf{S}^{\rho^2-c^2=u^2}_{\frac{t}{s}=1}$. Joms suranda taškų S ir T geometrinių vietų lygtis lentelėmis pateikia visų trigonometrinių linijų kitimo ribas pirmajame kvadrante bei trigonometrinių linijų reikšmes kampams $(\pi - \alpha)$, $(\pi + \alpha)$, $(2\pi - \alpha)$, $(2\pi + \alpha)$ per jų reikšmes kampui α. Randa santykį su įprastinėmis trigonometrinėmis funkcijomis:

$$\frac{\sin\alpha}{s_\alpha} = \frac{\cos\alpha}{c_\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{t_\alpha} = \frac{\sec\alpha}{z_\alpha} = \frac{1}{\rho_\alpha},$$

bet nenurodo, jog iš to seka, kad $\frac{\rho_\alpha \sin\alpha}{s_\alpha} = 1$, t. y. $\sin\alpha = \operatorname{Sin}\alpha$. Suranda trigonometrinių linijų formules kampų sumai, dvigubam kampui ir formules trikampiui apskaičiuoti, pateikia kompleksinio argumento trigonometrinių linijų išraiškas. Visos formulės gaunamos pasinaudojus įprastinėmis trigonometrinėmis funkcijomis. Kita plačiau panagrinėta sistema yra $\mathbf{S}^{\rho=r}_{s=u}$. Joje kampas φ yra kintamas ir priklauso nuo kampo α pagal lygtį $\frac{u}{r} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$. Šios sistemos brėžinys yra 2 pav. Šiuo atveju taško S lygtis yra $x^2 + y^2 = u^2$. Iš bet kurio taško S brėžiamas lankas spinduliu u iki susikirtimo su X ašimi. Taip gaunami du taškai N_1 ir N_2 ir dvi sinusinės atkarpos SN_1 ir SN_2. Analogiškai ir kitos trigonometrinės linijos susidvejina. Taip pat ir kampo φ gaunamos dvi reikšmės φ_1 ir φ_2. Surastos formulės šios sistemos linijoms išreikšti per įprastines trigonometrines funkcijas, taip pat dviejų kampų sumos trigonometrinių linijų išraiškos, formulės trikampių plotams apskaičiuoti bei formulės, į kurias į eina menamojo argumento eksponentinė funkcija.

Aptaręs trigonometrines funkcijas, kaip bet kurių dviejų trigonometrinių linijų santykius, pereina prie jų diferencijavimo, integravimo ir skleidimo eilutėmis klausimų. Juos nagrinėja konkrečioms sistemoms, jų trigonometrines funkcijas išreiškęs per įprastines trigonometrines funkcijas. Aptaria ir atvirkštinių trigonometrinių funkcijų išraišką per įprastines trigonometrines funkcijas. Toks yra 13-to, 14-to ir 15-to skyrelių turinys.

Toliau panagrinėja atvirkščią uždavinį: pasirinkus tam tikrą kreivę trigonometrinės sistemos taškų S kreive, rasti šią sistemą. Tam skirta keletas pavyzdžių. Taškų S lygčiai

$$a(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) = y\sqrt{x^2+y^2}$$

atitinka sistema $S^{t=a}_{\varphi=\vartheta}$, o lygtį

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{x-a} = \frac{x^2+y^2}{x\sin\vartheta - y\cos\vartheta}$$

laikydamas taško S lygtimi, nustato, kad šiuo atveju irgi $\varphi = \vartheta$, o pati sistema jau bus tam tikra sukrautinė. Pastarąją lygtį laikant taškų T geometrine vieta, kai $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, gaunama sistema

$$S^{\frac{\varrho}{c}(c-\varrho)=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Pastebėta, kad tai pačiai taškų S ar T lygčiai gali atitikti kelios skirtingos trigonometrinės sistemos. Pvz., taškų S lygčiai $x^2+y^2=r^2$ atitinka 6 sistemos su nekintamu $\rho = r$, o antrasis pastovusis dydis yra viena iš trigonometrinių linijų. Taip pat rasta keletas sistemų, kai ši lygtis yra taškų T lygtis. Todėl daroma išvada, kad trigonometrinei sistemai nusakyti būtinos bent dvi lygtys. Išnašoje autorius nurodo, jog tolesni jo tyrinėjimai parodė, jog būtinos trys lygtys, būtent taškų S, T ir Q lygtys. Tai pateikta straipsnyje [2].

Pastebėtina, jog neatkreipiamas dėmesys į tai, kad skirtingos sistemos gali nusakyti tas pačias trigonometrines funkcijas. Pvz., sąlyga $\varphi = \frac{\pi}{2}$ visada veda prie įprastinių, dabar naudojamų trigonometrinių funkcijų. Aplamai, trigonometrinės funkcijos yra invariantai panašumo transformacijos atžvilgiu.

Tai, kad skaičiavimai atliekami naudojantis įprastinėmis funkcijomis irgi rodo, kad įprastinių trigonometrinių funkcijų (ne linijų) pakanka trikampio kraštinių santykiams nusakyti. Formules tam reikalui galime rasti knygoje [1].

Paskutiniame, septynioliktame skyrelyje pateiktas trumpas pateiktųjų rezultatų sąvadas. Knygelės apimtis 72 puslapiai.

Ši knygelė yra platus ir savarankiškai atliktas tyrinėjimas apie trigonometrinių funkcijų, atitinkančių, bet kokio, o ne vien tik stačiojo, trikampio kraštinių santykių nusakymą per trigonometrines linijas. Jose netgi esama užuominų apie dviejų argumentų trigonometrines funkcijas, kai trigonometrinės sistemos krypties kampas irgi yra kintamas. Pateikiama labai daug trigonometrinių linijų sistemų pavyzdžių, tačiau jie nėra pilnai surūšiuoti pagal konkrečias trigonometrinių funkcijų sistemas.

Literatūra

[1] Dr. Biehringer. *Über schiefe trigonometrische Funktionen und ihre Anwendung*. Druck und Verlag der C. H. Beck'schen Buchhandlung. Nördlingen, 1877, S. 57.

[2] A. Dambrauskas. *Apie sutrauktines stačiakampes trigonometrijos sistemas*. Lietuvos universiteto Matematikos gamtos fakulteto darbai. Kaunas t. 3, 395–425, 1926 ir t. 5, 70–123, 1930.

[3] A. Dombrovski. *Pri novaj trigonometriaj sistemoj*. Germanijo. Esperanto Verlag Möller et Borel. Berlino, 1906. S. 32.

[4] A. Dombrovski. *Nouveaux systèmes trigonometriques, traduit de l'Esperanto par E. Lefèvze, professeur á l'École militaire de Belgique.* Gand imprimerie á vapeur E. Meyer, Quai du Pont-Neuf, 1908. 48 p.

[5] A. Jakštas. *Naujos trigonometriškos sistemos. Bandymas filosofiškai nušviesti trigonometrijos pagrindus.* Knygų Leidimo Komisijos Leidinys. Kaunas 1922, Otto Elsnerio spaustuvė, Berlynas, 1922. 72 p.

[6] A. Jakštas. *Rinktinė.* Vaga, Vilnius, 1998.

SUMMARY

The new trigonometrical systems of Aleksandras Dambrauskas

N. Kalinauskaitė

We review the description of trigonometrical functions via the systems of trigonometric lines as Aleksandras Dambrauskas has done in his book [5].

Keywords: trigonometrical systems, trigonometrical lines.