LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
52 tomas, 2011, 353–358

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Kvazigardelinių atsitiktinių dydžių serijų sumų skirstinių asimptotinė analizė

Algimantas Bikelis, Juozas Augutis, Kazimieras Padvelskis

Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas
Vileikos 8, LT-44404 Kaunas
E. paštas: marius@post.omnitel.net; j.augutis@if.vdu.lt; k.padvelskis@if.vdu.lt

Santrauka. Diskretų k-matį atsitiktinį vektorių $\vec{\xi_1} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ vadinsime kvazigardeliniu, jeigu jo koordinatės $\xi_1, \ldots, \xi_k$ yra kvazigardeliniai atsitiktiniai dydžiai ξ_i, t. y. ξ_i įgyja reikšmes $(\vec{\beta}_i, \vec{\nu}_i) = \beta_{1i}\nu_{1i} + \cdots + \beta_{k_i i}\nu_{k_i i}$, $\nu_{ji} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\beta_{ji} > 0$ ir vektoriaus $\vec{\beta}_i = (\beta_{1i}, \ldots, \beta_{k_i i})$ koordinatės yra tiesiškai nesurištos racionalių skaičių kūne. Yra įrodyta, kad vietoje kvazigardelinio vektoriaus $\vec{\xi_1}$, galima nagrinėti gardelinį atsitiktinį vektorių $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ erdvėje R^m, kur $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_k$. Toliau mes kalbėsime apie kvazigardelinius atsitiktinius vektorius, kurių klasei priklauso ir gardeliniai atsitiktiniai vektoriai (žiūr. [1]).
Raktiniai žodžiai: kvazigardelinis skirstinys, be galo dalus skirstinys, Appelio daugianariai.

Įvadas

Nagrinėsime k-mačių kvazigardelinių tikimybinių skirstinių $F(\vec{x}) = P\{\vec{\xi_1} < \vec{x}\}$, $\vec{x} \in R^k$, sąsūkas

$$F_n(\vec{x}) = F^{*n}(\vec{x}\sqrt{n}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Tikimybinis skirstinys gali priklausyti nuo n.

Tarkime charakteringoji funkcija

$$\hat{F}_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) = \int_{R^k} \mathrm{e}^{i(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}, \vec{x})}\, dF^{*n}(\vec{x})$$

visiems $|\vec{t}| \leqslant T$, $T > 0$, konverguoja į be galo dalaus skirstinio $G(\vec{x}) = P\{\vec{\eta} < \vec{x}\}$, $\vec{x} \in R^k$, charakteringąją funkciją

$$\hat{G}(\vec{t}) = \exp\left\{i(\vec{\gamma}, \vec{t}) + \int_{R^k} \left(\mathrm{e}^{i(\vec{t}, \vec{x})} - 1 - i(\vec{t}, \vec{x})\right)\nu(d\vec{x})\right\}$$

[2, 39 psl.]. Čia matas $\nu(d\vec{x})$ tenkina sąlygą

$$\int_{|\vec{x}|>1} |\vec{x}|\nu(d\vec{x}) < \infty.$$

Čia $|\vec{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_k^2$, $(\vec{t}, \vec{x}) = t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$ – skaliarinė sandauga.

Levy-Chinčino išdėstyme praleidžiame Gauso komponentę $-\frac{1}{2}\vec{t}^T \Sigma \vec{t}$.

Tarkime, kad tikimybiniai skirstiniai $F_n(\vec{x})$ ir $G(\vec{x})$ turi lygias nuliui matematines viltis ir vienodą neišsigimusią antrųjų momentų matricą Σ.

1 Charakteringosios funkcijos $\hat{F}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})$ formalus skleidinys

Konstruodami funkcijos

$$\hat{F}_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) = \left(\hat{F}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

formalų asimptotinį skleidinį mes priimame, kad $\vec{t}$ kinta baigtinėje sferoje ($|\vec{t}| < T$) ir kad egzistuoja baigtiniai momentai. Laikysime, kad tokias pat savybes turi be galo dalus tikimybinis skirstinys $G(\vec{x})$.

Visiems $n = 1, 2, \dots$ yra

$$G(\vec{x}) = \left(G^{*\frac{1}{n}}(\vec{x})\right)^{*n}.$$

Čia $G^{*\frac{1}{n}}(\vec{x}) = G_n(\vec{x})$ yra be galo dalus tikimybinis skirstinys su charakteringąja funkcija

$$\hat{G}_n(\vec{t}) = \exp\left\{\frac{1}{n}\int_{R^k}\left(\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{x})} - 1 - i(\vec{t},\vec{x})\right)\nu(d\vec{x})\right\}.$$

Atlikę kintamųjų pakeitimą $\vec{x} = \frac{\vec{y}}{\sqrt{n}}$, gauname

$$\hat{G}_n(\vec{t}) = \exp\left\{\int_{R^k}\left(\mathrm{e}^{i(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}},\vec{y})} - 1 - i\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}},\vec{y}\right)\right)\frac{\nu(d\frac{\vec{y}}{\sqrt{n}})}{n}\right\} = \hat{Q}_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right).$$

Čia $\hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})$ pažymi be galo dalią charakteringąją funkciją su tripletu $\mathcal{L}\{0, 0, \frac{1}{n}\nu(\frac{d\vec{y}}{\sqrt{n}})\}$.

Pažymėkime $Q_n(\vec{x}\sqrt{n})$ tikimybinis skirstinys, kurio charakteringoji funkcija yra $\hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})$. Tokiu būdu gavome, kad

$$\hat{G}(\vec{t}) = \left(\hat{G}_n(\vec{t})\right)^n = \left(\hat{Q}_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

arba

$$\hat{G}(\vec{x}) = Q_n^{*n}(\vec{x}\sqrt{n}).$$

Charakteringosios funkcijos $\hat{F}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})$ skleidimui panaudosime Appel daugianarius:

$$\begin{aligned}\hat{F}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)^n =& \hat{Q}_n^n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{\hat{F}(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}) - \hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}{\hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}\right)^n \\ =& \hat{G}(\vec{t})\exp\left\{\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^j A_j\left(\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

visiems $\vec{t}$, kurie tenkina nelygybę

$$\left|\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right| < 1.$$

Čia

$$\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) = n\left(\frac{\hat{F}(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}) - \hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}{\hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}\right),$$

$$A_j\left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right) = (-1)^j\left(\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^{j+1}\sum_{l=0}^{j-1} q_{jl}\left(\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^l,$$

$$q_{jl} = \frac{(j+l)q_{j-1,l} + q_{j-1,l-1}}{j+l+1}, \quad j = 1,2,\ldots,\ l = 1,2,\ldots,j-2,$$

$q_{j0} = \frac{1}{j+1}$, $q_{jl} = 0$, kai $l < 0$.

Pažymėkime

$$h(\vec{t}) = \int_{R^k} \left(\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{x})} - 1 - i(\vec{t},\vec{x})\right)\nu(d\vec{x}).$$

Tuomet

$$\hat{Q}_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}h(\vec{t})}, \quad \vec{t} \in R^k.$$

Funkcijos $(\Delta(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}))^r$ skleidimas.

Pasinaudosime lema: *jeigu tikimybinių skirstinių $F(\vec{x})$ ir $Q_n(\vec{x})$ sutampa du pirmieji momentai, tai*

$$\int_{R^k} (\vec{t},\vec{x})^l\, d\big(F(d\vec{x}) - Q_n(\vec{x})\big)^{*m} = 0,$$

kai $l = 0,1,\ldots,3m-1$.

Gauname

$$\begin{aligned}
\left(n\left(\hat{F}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) - \hat{Q}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^m &= \int_{R^k} \mathrm{e}^{i(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}},\vec{x})}\, d\big(n(F(\vec{x}) - Q_n(\vec{x}))\big)^{*m} \\
&= \sum_{l=3m}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l \int_{R^k} (i\vec{t},\vec{x})^l\, d\big(n(F(\vec{x}) - Q_n(\vec{x}))\big)^{*m} \\
&= \sum_{l=3m}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l-2m} \int_{R^k} (i\vec{t},\vec{x})^l\, d\big(F(\vec{x}) - Q_n(\vec{x})\big)^{*m}.
\end{aligned}$$

Atliekame kintamųjų pakeitimą $r = l - 3m$:

$$\begin{aligned}
&\left(n\left(\hat{F}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) - \hat{Q}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^m \\
&\quad = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r-3m)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r+m} \int_{R^k} (i\vec{t},\vec{x})^{r+3m}\, d(F\big(\vec{x}) - Q_n(\vec{x})\big)^{*m}.
\end{aligned}$$

Dabar skleidžiame funkciją

$$\left(\frac{1}{\hat{Q}_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}\right)^m = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}h(\vec{t})} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-m)^l}{l!} h^l(\vec{t})\left(\frac{1}{n}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-mh(\vec{t}))^l}{l!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2l}.$$

Tokiu būdu

$$\left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^m = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(r+3m)!l!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r+m+2l}\left(-mh(\vec{t})\right)^l \cdot \times \int_{R^k}(i\vec{t},\vec{x})^{r+3m}\,d\big(F(\vec{x})-Q_n(\vec{x})\big)^{*m}. \tag{2}$$

Liko išnagrinėti sandaugą

$$Y_r = \left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^r e^{\Delta_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Gauname

$$Y_r = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^{r+j} = \sum_{\alpha=r}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-r)!}\left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\alpha}. \tag{3}$$

Iš (2) ir (3) seka

$$\begin{aligned}
&e^{\Delta_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}A_j\left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)\\
&= (-1)^j\sum_{l=0}^{j-1}q_{jl}\left(\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^{l+j+1}e^{\Delta(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}\\
&= (-1)^j\sum_{l=0}^{j-1}q_{jl}\sum_{\alpha=l+j+1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-l-j-1)!}\left(\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\alpha}\\
&= (-1)^j\sum_{\beta=0}^{j-1}q_{j\beta}\sum_{\alpha=\beta+j+1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-\beta-j-1)!}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(r+3\alpha)!l!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r+\alpha+2l}\\
&\quad\times(-\alpha h(\vec{t}))^l\int_{R^k}(i\vec{t},\vec{x})^{r+3\alpha}\,d\big(F(\vec{x})-Q_n(\vec{x})\big)^{*\alpha}.
\end{aligned}$$

Šią išraišką įstatome į (1) lygybę ir gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{F}\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\\
&= \hat{G}(\vec{t})\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\Delta\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)\right)^m+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^j A_j\Delta_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)e^{\Delta_n(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}})}\right)\\
&= \hat{G}(\vec{t})\Bigg\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!(r+3m)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r+m+2l}(-mh(\vec{t}))^l\\
&\quad\times\int_{R^k}(i\vec{t},\vec{x})^{r+3m}\,d\big(F(\vec{x})-Q_n(\vec{x})\big)^{*m}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^j(-1)^j
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{\beta=0}^{j-1} \sum_{\alpha=\beta+j+1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} q_{j\beta} \frac{1}{(\alpha-\beta-j-1)!(r+3\alpha)!l!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r+\alpha+2l+2j}$$

$$\times \bigl(-\alpha h(\vec{t})\bigr)^l \int_{R^k} (i\vec{t},\vec{x})^{r+3\alpha}\, d\bigl(F(\vec{x})-Q_n(\vec{x})\bigr)^{*\alpha} \Biggr\}$$

$$= \hat{G}(\vec{t}) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma} \sum_{r+m+2l=\gamma} \frac{(-m)^l}{m!l!(r+3m)!}$$

$$\times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{l+r+3m}}{\partial\varepsilon^l \partial\varrho^{r+3m}} \mathrm{e}^{(1+\varepsilon)h(\vec{t})+\varrho(i\vec{t},\vec{x})}\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d\bigl(\bigl(F(\vec{x})-Q_n(\vec{x})\bigr)^{*m}$$

$$+ \sum_{\gamma=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma} \sum_{r+\alpha+2l+2j=\gamma} (-1)^j q_{j\beta} \frac{(-\alpha)^l}{(\alpha-\beta-j-1)!(r+3\alpha)!l!}$$

$$\times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{l+r+3\alpha}}{\partial\varepsilon^l \partial\varrho^{r+3\alpha}} \mathrm{e}^{(1+\varepsilon)h(\vec{t})+\varrho(i\vec{t},\vec{x})}\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d\bigl((F(\vec{x})-Q_n(\vec{x})\bigr)^{*\alpha}. \tag{4}$$

Dabar būtina aptarti charakteringąją funkciją

$$\exp\bigl\{i(\vec{t},\varrho\vec{x}) + (1+\varepsilon)h(\vec{t})\bigr\},$$

kuri yra be galo dali su Levy tripletu

$$\mathcal{L}\bigl(\varrho, 0, (1+\varepsilon)\nu\bigr),$$

čia $0 \leqslant \varrho < 1$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Akivaizdu, kad

$$\bigl(\hat{G}(\vec{t})\bigr)^{1+\varepsilon} \mathrm{e}^{i(\vec{t},\varrho\vec{x})} = \exp\bigl\{i(\vec{t},\varrho\vec{x}) + (1+\varepsilon)h(\vec{t})\bigr\}.$$

Pasinaudodami formuliu asimptotiniu skleidiniu (4) mes gauname tikimybės

$$P\bigl\{\vec{\xi}_1 + \cdot + \vec{\xi}_n = \bigl((\vec{\beta}_1,\vec{\nu}_1),\dots,(\vec{\beta}_k,\vec{\nu}_k)\bigr)\bigr\}$$

asimptotinį skleidinį.

Tarkime, kad egzistuoja tankiai

$$g^{*(1+\varepsilon)}(\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R^k} \mathrm{e}^{-i(\vec{t},\vec{y})} \mathrm{e}^{(1+\varepsilon)h(\vec{t})}\, d\vec{t}$$

ir

$$p^{*n}(\vec{y}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{R^k} \mathrm{e}^{-i(\vec{t},\vec{y})} \hat{F}_n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right) d\vec{t},$$

$0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Tuomet nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių kvazigardelinių atsitiktinių dydžių sekai $\xi_1, \ldots, \xi_n$ yra teisingas formalus skleidinys

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1 \ldots \beta_k} P\bigl\{\xi_1 + \cdots + \xi_n = (\vec{\beta}, \vec{\nu})\bigr\} \\
&\quad = g\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}}\right) + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma} \sum_{r+m+2l=\gamma} \frac{(-m)^l}{m!l!(r+3m)!} \\
&\qquad \times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{l+r+3m}}{\partial\varepsilon^l \partial\varrho^{r+3m}} g^{*(1+\varepsilon)}\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}} - \varrho\vec{x}\right)\right]\Big|_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d\bigl(F(\vec{x}) - Q_n(\vec{x})\bigr)^{*m} \\
&\qquad + \sum_{\gamma=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma} \sum_{r+\alpha+2l+2j=\gamma} (-1)^j q_{j\beta} \frac{(-\alpha)^l}{(\alpha-\beta-j-1)!(r+3\alpha)!l!} \\
&\qquad \times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{l+r+3\alpha}}{\partial\varepsilon^l \partial\varrho^{r+3\alpha}} g^{*(1+\varepsilon)}\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}} - \varrho\vec{x}\right)\right]\Big|_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d\bigl(F(\vec{x}) - Q_n(\vec{x})\bigr)^{*\alpha} + \cdots
\end{aligned}
$$

(žiūr. (4)). Čia $g(\vec{y}) = g^{*1}(\vec{y})$, $\vec{\beta}\vec{\nu} = (\beta_1\nu_1, \ldots, \beta_k\nu_k)$,

$$
\sum_{r+m+2l=\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty},
$$

$$
\sum_{r+\alpha+2l+2j=\gamma} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{j-1}\sum_{\alpha=\beta+j+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}.
$$

Literatūra

[1] C.-G. Essen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. *Acta Math.*, **77**:1–125, 1945.

[2] K.-I. Sato. *Levy Process and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge Univ. Press.

SUMMARY

Asymptotic expansions for distributions of sums of a double sequence of quasi-lattice random variables

A. Bikelis, J. Augutis, K. Padvelskis

We consider the formal asymptotic expansion of probability distribution of the sums of independent random variables. The approximation was made by using infinitely divisible probability distributions.

Keywords: Quasi-lattice distribution, infinitely divisible distribution, Appel polynomials.