Lietuvos matematikos rinkinys ISSN 0132-2818
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B www.mii.lt/LMR/
53 t., 2012, 25–30

Vidurkinimo išilgai hiperbolinės sistemos charakteristikų operatoriaus savybės

Aleksandras Krylovas, Olga Lavcel-Budko

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT10223 Vilnius
E. paštas: akr@fm.vgtu.lt, olecka@gmail.lt

Santrauka. Nagrinėjama kvazitiesinė suvidurkintų lygčių sistema su periodinėmis pradinėmis sąlygomis, kuri atsiranda konstruojant įvairių netiesinių bangų sąveikos matematinių modelių ilgųjų bangų asimptotikas. Įrodomos lemos, leidžiančios pertvarkyti kvazitiesinę integralinių diferencialinių lygčių sistemą į pavidalą, analogišką pusiau tiesinės hiperbolinės sistemos, užrašytos Rymano invariantais. Tai leidžia žinomais metodais nustatyti sprendinio egzistavimo sąlygas.

Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos, hiperbolinės sistemos.

1 Įvadas

Nagrinėjama suvidurkintų lygčių sistema

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tau} = M_j\left[f_{j0}(U) + \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(U)\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right], \quad U = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{1}$$

su periodinėmis pradinėmis sąlygomis

$$u_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j) \equiv u_{0j}(y_j + 2\pi), \quad j = 1, 2, \ldots, n,\ y_j = x - \lambda_j t, \tag{2}$$

čia M_j – vidurkinimo išilgai nesutrukdytos (t. y., kai $\varepsilon = 0$) hiperbolinės sistemos (5) charakteristikų operatorius:

$$M_j\big[f(\tau, t, x)\big] \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, s, y_j + \lambda_j s)\, ds. \tag{3}$$

Šis operatorius atsiranda, konstruojant hiperbolinės kvazitiesinės sistemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

ilgųjų bangų asimptotiką $U = U_0 + \varepsilon\tilde{U}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, tolygiai tinkamą ilgame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$. Tokios sistemos pateikiamos literatūroje [5, 1], tačiau paprastai paliekamos be tolesnio tyrimo ir traktuojamos kaip tam tikras asimptotinio integravimo rezultatas. Jos buvo sprendžiamos skaitiniais metodais [4], bet tikslaus sprendinio egzistavimo klausimas nėra pakankamai ištirtas.

Jei (4) sistema yra hiperbolinė, ją galima perrašyti Rymano invariantais [6]:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(U, U_x; \varepsilon). \tag{5}$$

Čia λ_j yra matricos $A(U_0)$ tikrinės reikšmės. Pareikalaukime, kad visos jos būtų skirtingos:

$$(\forall i \neq j)\ \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Pastebėkime, kad (6) sąlyga garantuoja (4) sistemos hiperboliškumą.

Suformuluoti uždaviniai nagrinėjami literatūroje [5, 1], kai f_j turi tik kvadratinius netiesiškumus $u_k \frac{\partial u_i}{\partial x}$. Bendresnis (1) suvidurkintos sistemos pavidalas buvo nagrinėjamas [2, 3] su įvairiomis, nebūtinai periodinėmis pradinėmis sąlygomis. Tačiau pilnas asimptotinio artinio pagrindimas, t. y., (1) ir (5) uždavinių egzistavimas, vienatis ir jų artumas ilgame laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$, darbuose [2, 3] pateiktas tik esant pusiautiesinei (žr. [6]) sistemai, t. y., kai (1) ir (5) dešinėje pusėje nėra dalinių išvestinių.

Čia pradėto tyrimo tikslas – parodyti, kad uždaviniai (1)–(3) turi vienintelį klasikinį sprendinį, kai galioja (6) sąlyga ir funkcijos f_{ji}, u_{0j} yra tolydžiai diferencijuojamos. Šiame darbe mes įrodysime kelias vidurkinimo operatoriaus (3) savybes, kurios leis perrašyti sistemą (1), (2) pusiau tiesinės sistemos pavidalu, kurią bus galima tirti žinomais [6] metodais.

2 Operatoriaus sąvybės

Iš operatoriaus M_j apibrėžimo (3) matome, kad

$$\begin{aligned} M_j\big[g(\tau, y_1, y_2, \ldots, y_n)\big] \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g\big(\tau, y_j + (y_j + \lambda_j - \lambda_1)s \\ + (y_j + \lambda_j - \lambda_2)s, \ldots, (y_j + \lambda_j - \lambda_n)s\big)\, ds \equiv \langle g\rangle_j(\tau, y_j). \end{aligned} \tag{7}$$

Iš (7) išplaukia, kad

$$M_j\big[g(\tau, y_j)\big] \equiv g(\tau, y_j). \tag{8}$$

Taigi (1) sistemą galime perrašyti taip:

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tau} - \big\langle f_{jj}(U)\big\rangle_j \frac{\partial u_j}{\partial y_j} = M_j\bigg[f_{j0}(U) + \sum_{i\neq j} f_{ji}(U)\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\bigg]. \tag{9}$$

Parodysime, kad (3) reiškinį galima diferencijuoti pagal x (tai atitinka diferencijavimą pagal charakteristinį kintamąjį y_j).

1 lema. *Jei funkcijos f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ yra tolydžios ir periodinės pagal t ir x su periodu 2π, kai $\tau \in [0, \tau^0]$, $\tau^0 > 0 -$ const (rašysime $f(\tau, t, x) \in C^1_{2\pi}([0, \tau^0] \times R^2)$) tai*

$$\frac{\partial}{\partial x} M_j\big[f(\tau, t, x)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(\tau, s, x + \lambda_j s)}{\partial x}\, ds = M_j\bigg[\frac{\partial f(\tau, t, x)}{\partial x}\bigg]. \tag{10}$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$\begin{aligned} \Delta f(\tau,t,x) &= \Delta f(\tau,t,x+\Delta x) - f(\tau,t,x),\\ M_j^T[\Delta f] &= \frac{1}{T}\int_0^T \big(f(\tau,s,x+\Delta x+\lambda_j s) - f(\tau,s,x+\lambda_j s)\big)\,ds. \end{aligned}$$

Pastebėję, kad egzistuoja $\theta(\tau,s,T)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$:

$$\Delta f = \frac{\partial f(\tau,s,x+\theta\Delta x+\lambda_j s)}{\partial x}\Delta x$$

gauname

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}M_j\big[f(\tau,t,x)\big] &= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta x}M_j^T[\Delta f]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f(\tau,s,x+\theta\Delta x+\lambda_j s)}{\partial x}\,ds = M_j\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]. \end{aligned}$$

Iš 1 lemos išplaukia formulė:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}M_j\big[f(\tau,y_1,\dots,y_n)\big] = M_j\left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\tau,y_1,\dots,y_n)}{\partial y_k}\right]. \tag{11}$$

Pastebėkime, kad jei funkcija $f(\tau,t,x)$ turi tolydžią dalinę išvestinę pagal τ, tai galioja:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}M_j\big[f(\tau,t,x)\big] = M_j\left[\frac{\partial f(\tau,t,x)}{\partial\tau}\right].$$

Tarkime, kad $g_k(y)$ ir $u_i(y)$ yra tolydžiai diferencijuojamos 2π-periodinės funkcijos (rašome $g_k, u_i \in C^1_{2\pi}(R)$). Pažymėkime:

$$\begin{aligned} G(y) &= g(y)\frac{\partial u_i(y)}{\partial y},\\ \Delta G(y) &= G(y+\Delta y) - G(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_j^T[\Delta G] =& \frac{1}{T}\int_0^T \left(g_k\big(y+\Delta y+(\lambda_j-\lambda_k)s\big)\frac{\partial u_i(y+\Delta y+(\lambda_j-\lambda_i)s)}{\partial y}\right.\\ &\left. - g_k\big(y+(\lambda_j-\lambda_k)s\big)\frac{\partial u_i(y+(\lambda_j-\lambda_i)s)}{\partial y}\right)ds. \end{aligned}$$

Pertvarkome šį reiškinį taip:

$$M_j^T[\Delta G] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(\Delta g_k\frac{\partial u_i(y+(\lambda_j-\lambda_i)s)}{\partial y} + g_k\Delta\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)ds.$$

Pasinaudokime tuo, kad egzistuota $\theta(y,s)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$:

$$\Delta g_k = \frac{\partial g_k(y+\theta\Delta y+(\lambda_j-\lambda_k)s)}{\partial y}\,\Delta y$$

ir integruojame reiškinį dalimis:

$$\frac{1}{\Delta y}M_j^T[\Delta G] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\partial g_k}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial y}\,ds + \frac{1}{T(\lambda_j-\lambda_i)}g_k\frac{\Delta u_i}{\Delta y}\bigg|_0^T - \frac{\lambda_j-\lambda_k}{T(\lambda_j-\lambda_i)}\int\limits_0^T \frac{\partial g_k}{\partial y}\frac{\Delta u_i}{\Delta y}\,ds.$$

Kadangi visos funkcijos tolydžios ir periodinės, egzistuoja ir lygios ribos

$$\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta y}M_j^T[\Delta G] = \lim_{T\to\infty}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}M_j^T[\Delta G].$$

Pasinaudoję lygybe

$$1-\frac{\lambda_j-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_i} = \frac{\lambda_k-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i},$$

gauname, kad funkcija $M_j[g_k\frac{\partial u_i}{\partial y}]$ yra diferencijuojama ir galioja formulė

$$\frac{\partial}{\partial y_j}M_j\left[g_k\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right] = \frac{\lambda_k-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}M_j\left[\frac{\partial g_k}{\partial y_k}\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right]. \tag{12}$$

2 lema. *Tarkime, kad* $f(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in C^1(R^n)$, $u_i(\tau,y_i)\in C^1_{2\pi}([0,\tau^0]\times R)$, $i\neq j$ *ir galioja* (6) *sąlyga. Tada funkcija* $M_j[f(U)\frac{\partial u_i}{\partial y_i}]$ *turi dalinę išvestinę pagal* y_j:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}M_j\left[f(U)\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}M_j\left[\frac{\partial f(u)}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right]. \tag{13}$$

Įrodymas išplaukia iš (12) formulės, pakeitus g_k į funkciją $f(U)$.

Pažymėkime g_j reiškinį (9) sistemos (t. y., pertvarkytos (1) sistemos) dešinėje pusėje:

$$g_j = f_{j0}(U) + \sum_{i\neq j} f_{ji}(U)\frac{\partial u_i}{\partial y_i}.$$

Tada iš 2 lemos išplaukia, kad $M_j[g_j](\tau,y_j)\in C^1_{2\pi}([0,\tau^0]\times R)$ ir

$$\frac{\partial}{\partial y_j}M_j[g_j] = M_j\left[\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f_{j0}}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_k} + \sum_{i\neq j}\frac{\lambda_k-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}\frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right)\right]. \tag{14}$$

3 Savybių pritaikymas

Pažymėkime $\frac{\partial u_j}{\partial y_j} = v_j$ ir $W = (u_1,u_2,\ldots,u_n,v_1,v_2,\ldots,v_n) = (w_1,\ldots,w_{2n})$. Tada diferencijuojame (1), (2) pagal y_j ir taikome (13), (14) formules:

$$\frac{\partial w_j}{\partial\tau} - M_j\big[G_j(W)\big]\frac{\partial w_j}{\partial y_j} = M_j\big[F_j(W)\big], \tag{15}$$

čia

$$G_j \equiv 0, \quad \text{kai } j = 1, 2, \dots, n,$$
$$G_j = f_{j-n,j-n}(w_1, w_2, \dots, w_n), \quad \text{kai } j = n+1, n+2, \dots, 2n,$$

$$\begin{aligned} F_j(W) &= f_{0j}(U) + \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(U)v_i \\ &= f_{0j}(w_1, \dots, w_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(w_1, \dots, w_n)w_{n+i}, \quad \text{kai } j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$F_{n+j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_{jj}(U)}{\partial u_k} v_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_{0j}(U)}{\partial u_k} v_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial f_{0j}(U)}{\partial u_k} v_k v_i.$$

Užrašome pradines sąlygas:

$$w_j(0, y_j) = w_{0j}(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \tag{16}$$

čia $w_{0j} \equiv u_{0j}$, $w_{0,n+j} \equiv \frac{du_{0j}}{dy_j}$.

Taigi gavome "prailgintos" (žr. [6]) sistemos analogą, t. y., sistema jau užrašyta taip, kaip užrašomos hiperbolinės pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemos Rymano invariantais, t. y., sistema nebeturi dešinėje pusėje dalinių išvestinių.

Koši uždaviniui (15), (16) sistemai galima taikyti nuosekliųjų artinių metodą:

$$W^0 \equiv W_0, \ \frac{\partial w_j^{k+1}}{\partial \tau} - M_j\big[G_j\big(W^k\big)\big] \frac{\partial w_j^{k+1}}{\partial y_j} = M_j\big[F_j\big(W^k\big)\big]. \tag{17}$$

Panašiai kaip buvo daroma [2], galima įrodyti (17) funkcijų sekos konvergavimą į (15), (16) uždavinio periodinį sprendinį tam tikrame intervale $\tau \in [0, \tau^0]$. Tačiau straipsniuose [2, 3] nebuvo išnagrinėtas atvejis, kai (15) sistemoje $G_j \neq 0$, o tai sudaro tam tikrus uždavinio tyrimo sunkumus ir yra mūsų tolimesnių tyrimų objektas.

Literatūra

[1] R. Arora. Non-planar shock waves in a magnetic field. *Math. Appl.*, **56**:2686–2691, 2008.

[2] A. Krylovas. Justification of the method of internal averaging along characteristics of weakly nonlinear systems. *Lith. Math. J.*, 1989.

[3] A. Krylovas. Justification of the method of internal averaging along characteristics of weakly nonlinear systems II. *Lith. Math. J.*, **30**(1):88–100, 1990.

[4] A. Krylovas ir R. Čegis. A review of numerical asymptotic methods for weakly nonlinear waves. *Math. Model. Anal.*, **9**(3):209–222, 2004.

[5] V.P. Maslov and P.P. Mosolov. *Nonlinear Wave Equations Perturbed by Viscous Terms.* de Gruyter, Berlin, New Yorrk., 2000. 329, ISBN 3-11-015282-7

[6] B.L. Rozdestvenskii and N. N. Yanenko. *Systems of Quasilinear Equations and Their Application to Gas Dynamics.* Nauka, Moscow, 1978.

SUMMARY

Properties of the averaging along the characteristics hyperbolic of the system operator

A. Krylovas, O. Lavcel-Budko

Examing the averaged equations system with periodic initial conditions. Proved the lemmas, which allow to reorganize the system in to the form similar to a semi-linear hyperbolic system written in Riemann invariants. This allows to set conditions for the existence of the solution.

Keywords: asymptotical methods, averaging, nonlinearwaves, hyperbolic system.