LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 31–36

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Judėjimo lygčių atskyrimas dvimatės gravitacinės švytuoklės modelyje

Olga Lavcel-Budko, Aleksandras Krylovas, Paulius Miškinis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT10223 Vilnius
E. paštas: olecka@gmail.lt, aleksandras.krylovas@vgtu.lt, paulius.miskinis@vgtu.lt

Santrauka. Nagrinėjame gravitacinės švytuoklės ant tampraus siūlo svyravimų modelį. Šis modelis susiveda į dvejų netiesinių gana komplikuotų lygčių sistemą [2], kurioje išsamiai nagrinėjami tik atskiri artėjimai stacionarios būsenos atžvilgių. Naudojant papildomas fizikines prielaidas apie nagrinėjamą modelį ir energijos tvermės dėsnį, dviejų antros eilės netiesinių svyravimo diferencialinių lygčių sistemą pavyko pertvarkyti į paprastesnę sistemą, kurioje viena iš lygčių yra trečios eilės netiesinė diferencialinė lygtis, kuri sprendžiama skaitiškai, naudojant Maple programą. Sprendinys lyginamas su asimptotiniu artiniu ilgajame laiko intervale.

Raktiniai žodžiai: švytuoklė, netiesiniai svyravimai, asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos.

1 Judėjimo lygties išvedimas

Klasikinės matematinės švytuoklės modelyje naudojamos pakabos nesvarumo, netąsumo ir absoliutaus tamprumo prielaidos. Tamprios matematinės švytuoklės modelyje lieka galiojančios pakabos nesvarumo ir absoliutaus tamprumo prielaidos, tačiau netąsumo prielaidos atsisakoma. Tai reiškia, kad kartu su senu dinaminiu kintamuoju – atsilenkimo kampu $\varphi = \varphi(t)$, turime papildomą kintamąjį – pakabos ilgį $L = L(t)$.

Masės m ir nykstamai mažų išmatavimų kūnas pakabintas ant tamprumo k spyruoklės, galintis laisvai judėti gravitaciniame lauke, apibūdinamas Lagranžo funkcija:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{L}^2\right) - \frac{k}{2}(L - L_0)^2 - mgh, \tag{1}$$

čia

$$h = L_0(1 - \cos\varphi) - (L - L_0)\cos\varphi = L_0 - L\cos\varphi \tag{2}$$

yra pakyla virš neištemptos ilgio L_0 pakabos pusiausvyros padėties. Iš Lagranžo funkcijos $\mathcal{L}$ ir funkcijos h išraiškų (1), (2) seka judėjimo lygtys:

$$\begin{cases} m\ddot{L} - mL\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k(L - L_0) = 0, \\ L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Analitiškai šį sistemą neišsprendžiama, todėl paprastai nagrinėjami jos artiniai. Pavyzdžiui, įvedus naujus kintamuosius [2]:

$$x = L - L_0 - \frac{mg}{k}, \qquad L_s = L_0 + \frac{mg}{k}, \qquad \omega_x^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega_\psi^2 = \frac{g}{L_s}, \tag{4}$$

lygčių sistema (3) pereina į sistemą:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = (L_s + x)\dot{\varphi}^2 - g(1 - \cos\varphi), \\ \ddot{\varphi} + \omega_\psi^2 \sin\varphi = -\dfrac{1}{L_s} x\ddot{\varphi} - \dfrac{2}{L_s}\dot{x}\dot{\varphi}. \end{cases} \tag{5}$$

Bendras šios netiesinės lygčių sistemos sprendinys taip pat nežinomas, tačiau nesunku nurodyti specialų šios sistemos sprendinį, kai $\varphi = 0$. Šiuo atveju švytuoklė svyruoja tik vertikaliai ir

$$x = A\cos(\omega_x t + \psi). \tag{6}$$

Šį vieną periodinį sprendinį galima traktuoti kaip pagrindinį svyravimą. Tačiau antras pagrindinis svyravimas randamas tik tada, kai svyravimų amplitudė maža: $|\varphi| \ll 1$. Pabandykime nedaryti šių prielaidų ir panagrinėti sistemą (3) bendruoju atveju, atsižvelgus į tai, jog gravitacinės švytuoklės atveju pasipriešinimo jėgų nepaisome. Tai reiškia, kad pilna mechaninės sistemos energija[1] $E = E_k + E_p$ yra pastovus dydis:

$$E = \frac{m}{2}\big(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{L}^2\big) + \frac{k}{2}(L - L_0)^2 + mgh, \tag{7}$$

čia h yra ta pati funkcija (2).

Judėjimo lygtyse (3) ir energijos išraiškoje (7) tikslinga pereiti prie bedimensinių kintamųjų ir funkcijų:

$$l = \frac{L}{L_0}, \qquad \omega_x^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega_\varphi^2 = \frac{g}{L_0}, \qquad \omega^2 = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2}, \qquad \tau = \omega_\varphi t. \tag{8}$$

Tada judėjimo lygtys (3) ir energijos tvermės lygties (7) bedimensinės formos atrodo taip:

$$\begin{cases} \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi + \omega^2(l - 1) = 0, \\ l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + \sin\varphi = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\omega^2\mathcal{E} - 2 = l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2 + \omega^2(l - 1)^2 - 2l\cos\varphi, \tag{10}$$

čia $\mathcal{E} = E/(kL_0^2/2)$.

Kartu su lygtimis (9) ir (10) pasinaudosime sąlyga $\dot{\mathcal{E}} = 0$. Kaip seka iš energijos tvermės dėsnio, pilna energijos išvestinė pagal laiką:

$$l\dot{l}\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \dot{l}\ddot{l} + \omega^2(l - 1)\dot{l} - \dot{l}\cos\varphi + l\dot{\varphi}\sin\varphi = 0. \tag{11}$$

Lygčių sistema (9), (10) ir (11) sudaro tamprios gravitacinės švytuoklės modelį, nagrinėjama šiame straipsnyje.

Iš lygčių sistemos (9) ir (10) gausime lygtį, priklausančią tik nuo funkcijos $l(t)$.

[1] Galimybė išreikšti mechaninę sistemą per Lagranžo funkciją dar nereiškia, kad mechaninėje sistemoje galioja energijos tvermės dėsnis. Tam reikia, kad Hamiltono funkcija, gaunama iš Lagranžo funkcijos, atlikus Ležandro transformaciją, nepriklausytų nuo laiko. T. y. lygtis (1) dar nereiškia, kad sistemos energija yra pastovus dydis. Lygtis (7), atitinkanti energijos tvermės dėsnį, tikrai yra prielaida, kad šis dydis yra pastovus, tačiau, gavus mechaninės sistemos sprendinį, reikia tuo įsitikinti, t. y. parodyti, kad įstačius į lygtį (7) gautą sprendinį, tikrai gauname nepriklausantį nuo laiko dydį.

Padauginkime antrą sistemos (9) lygtį iš $\dot\varphi$ ir suteiksime jai formą

$$\frac{1}{2}l\big(\dot\varphi^2\big)^{\cdot} + 2\dot l\dot\varphi^2 - (\cos\varphi)^{\cdot} = 0. \tag{12}$$

Iš pirmosios (9) sistemos lygties išreiškime $\cos\varphi$ ir įrašykime į (10) ir (12) lygtis. Gausime:

$$3l^2\dot\varphi^2 + \dot l^2 - 2l\ddot l + \omega(\omega-2)l^2 - 2\omega(\omega-1)l + \omega^2 = \omega^2\mathcal{E} - 2, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}l(\dot\varphi^2)^{\cdot} + 2\dot l\dot\varphi^2 + \big[l\dot\varphi^2 - \ddot l - \omega(l-1)\big]^{\cdot} = 0. \tag{14}$$

Pažymėkime: $C = \omega^2(\mathcal{E}-1) - 2$,

$$\varPhi(l) = \dot l^2 - 2l\ddot l + \omega(\omega-2)l^2 - 2\omega(1-\omega)l. \tag{15}$$

Tada (13) lygtį galime perrašyti taip:

$$3l^2\dot\varphi^2 + \varPhi(l) = C. \tag{16}$$

Išreiškiame $\dot\varphi^2$ (16) lygties ir įrašome ją į (14) lygtį:

$$\left(\frac{C-\varPhi(l)}{l}\right)^{\cdot} - \frac{1}{2}l\left(\frac{C-\varPhi(l)}{l^2}\right)^{\cdot} - \dddot l - \omega\dot l = 0. \tag{17}$$

Ši lygtis priklauso tik nuo funkcijos $l(t)$.

Pažymėję

$$f(l) = -\frac{\omega(1-\omega)}{2l} + 2\omega - 2 - 2\omega^2 - \frac{C}{l^2},$$

perrašome (17) lygtį taip:

$$\dddot l + \frac{\dot l\,\ddot l}{l} + \dot l f(l) = 0. \tag{18}$$

Spręsime Koši uždavinį (18), (19):

$$l(0) = l_0, \qquad \dot l(0) = l_1, \qquad \ddot l(0) = l_2. \tag{19}$$

Svyravimų atvejį atitinka sąlyga $f(l_0) > 0$.

2 Asimptotinis sprendimas

Pakeiskime kintamąjį [3]

$$l(t) = l_0 + \varepsilon\tilde l(t;\varepsilon), \tag{20}$$

ir perrašykime (18) lygtį taip:

$$\dddot{\tilde l} + \dot{\tilde l} f(l_0 + \varepsilon\tilde l) = -\varepsilon\left(\frac{\dot{\tilde l}\ddot{\tilde l}}{l_0 + \varepsilon\tilde l}\right). \tag{21}$$

Kai ε yra mažasis parametras, (21) lygtis pertvarkoma taip:

$$\dddot{\tilde{l}} + \dot{\tilde{l}} f(l_0) = -\varepsilon\left(\frac{\dddot{\tilde{l}}\tilde{l}}{l_0} + f'(l_0)\tilde{l}\dot{\tilde{l}}\right) + O\big(\varepsilon^2\big). \tag{22}$$

Nesutrukdytoji (t. y., kai $\varepsilon = 0$) (22) lygtis turi bendrąjį sprendinį

$$\tilde{l} = \tilde{l_0} + a\cos(\alpha t + \psi), \tag{23}$$

čia $\alpha = \sqrt{f(l_0)}$, konstantas $\tilde{l_0}, a$ ir ψ parenkame taip, kad galiotų pradinės sąlygos (19):

$$\tilde{l_0} + a\cos\psi = 0, \qquad -\varepsilon a\alpha\sin\psi = l_1, \qquad -\varepsilon a\alpha^2\cos\psi = l_2. \tag{24}$$

Taigi turime

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{l^1}{l^2}\alpha\right), \qquad a = \frac{1}{\varepsilon\alpha}\sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{1+\alpha^2}}, \qquad \tilde{l_0} = -a\cos\psi. \tag{25}$$

Pastebėkime, kad esant mažam parametrui ε, sąlygos (19) ir (20) uždavinio bus suderintos, tik jei

$$l_1 = O(\varepsilon), \qquad l_2 = O(\varepsilon), \tag{26}$$

kai $l_1 = l_2 = 0$, turime pastovų (17), (19) uždavinio sprendinį $l(t) = l_0$.

Rezonanso sąlygomis nustatyti, perrašykime (22) lygtį standartinės N. Bogoliubovo [1] prasme sistemos pavidalu. Tarkime, kad (23) formulėje $\tilde{l_0}$, a ir ψ yra laiko t funkcijos:

$$\tilde{l}(t;\varepsilon) = \tilde{l_0}(t;\varepsilon) + a(t;\varepsilon)\cos\big(\alpha t + \psi(t;\varepsilon)\big), \tag{27}$$

tačiau (27) reiškinio išvestinės sutampa su (23) reiškinio išvestinėmis (t. y., kai $\tilde{l_0}$, a ir ψ yra konstantos, t. y. vidurkinimo metodo idėja):

$$\dot{\tilde{l}} = -a\alpha\sin(\alpha t + \psi), \qquad \ddot{\tilde{l}} = -a\alpha^2\cos(\alpha t + \psi). \tag{28}$$

Formulės (28) bus teisingos, jei pareikalausime:

$$\dot{\tilde{l_0}} + a\cos(\alpha t + \psi) - a\dot{\varphi}\sin(\alpha t + \psi) = 0, \tag{29}$$

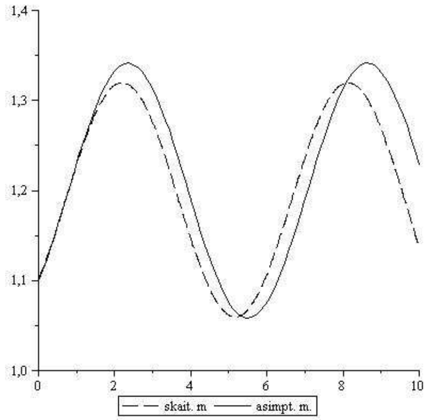
$$-\dot{a}\alpha\sin(\alpha t + \psi) - a\alpha\dot{\varphi}\sin(\alpha t + \psi) = 0. \tag{30}$$

Tada

$$\dddot{l} = -\dot{a}\alpha^2\cos(\alpha t + \psi) + a\alpha^2\dot{\psi}\sin(\alpha t + \psi) + a\alpha^3\sin(\alpha t + \psi), \tag{31}$$

ir įrašę (27), (28) ir (31) į (22), gauname

$$-\dot{a}\alpha^2\cos(\alpha t + \psi) + a\alpha^2\dot{\psi}\sin(\alpha t + \psi) = \varepsilon F(t, \tilde{l_0}, a, \psi) + O\big(\varepsilon^2\big), \tag{32}$$



1 pav. Koši uždavinio sprendinys.

čia

$$F = -\frac{a^2\alpha^3 \sin(\alpha t + \psi)\cos(\alpha t + \psi)}{l^0} + \big(\tilde{l^0} + a\cos(\alpha t + \psi)\big)a\alpha \sin(\alpha t + \psi).$$

Padauginkime (29) lygtį iš $\alpha \sin(\alpha t + \psi)$, o (32) – iš $\cos(\alpha t + \psi)$. Tada sudėję šias dvi lygtis, gauname (nerašome $O(\varepsilon^2)$ narių)

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\alpha^2} F(t, \tilde{l_0}, a, \psi)\cos(\alpha t + \psi). \tag{33}$$

Analogiškai gauname

$$\dot{\psi} = \frac{\varepsilon}{\alpha a} F(t, \tilde{l_0}, a, \psi)\sin(\alpha t + \psi). \tag{34}$$

Iš (29) lygybės ir (33), (34) gauname trečią sistemos lygtį

$$\dot{\tilde{l_0}} = \frac{\varepsilon}{\alpha^2} F(t, \tilde{l_0}, a, \psi)\cos^2(\alpha t + \psi) + \frac{\varepsilon}{\alpha} F(t, \tilde{l_0}, a, \psi)\sin^2(\alpha t + \psi). \tag{35}$$

Gauname sistemą iš trijų (33), (34), (35) lygčių, kurią suvidurkinus matome, kad dešinės pusės vudurkiai lygūs nuliui ir uždavinys rezonanso neturi. Todėl (27) artinys sutampa su (23). Iš to išplaukia, kad jis yra tolygiai tinkamas laiko intervale $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$. Uždavinį (17), (21) sprendžiame apytiksliai naudodamiesi Maple programos Rungės-Kuto metodu. Šis sprendinys ir jo asimptotinis artinys (23), kai $\varepsilon = 0.1$, $\omega = 2$, $c = 0.1$, $l_0 = 1$ parodyti 1 pav.

Literatūra

[1] N.N. Bogolyubov and Y.A. Mitropolskij. *Asymptotic Methods it the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Breach Scence Publ., NY, 1996.

[2] K. Magnus. *Schwingungen*. Durchgesehene auflage, New York, 1976. Vertimas iš vokiečių kalbos „Kolebanija“, Moskva, Mir, 1982.

[3] A. Nayfen. *Introduction to Perturbation Trchnigues*. New York, Chichester, Brisbabe, Toronto, 1981.

SUMMARY

Separation of the equations of motion in two-dimentional gravitatrional pendulums

O. Lavcel-Budko, A. Krylovas, P. Miškinis

We solve the classical problem-model of the oscillation of the gravitational pendulum on the elastic thread. This task was formulated, but it is not completely solved in the classical K. Magnus monograph "Wavering". With additional assumptions about the analyzed model in question (mass conservation law and considerations about certain physic) system of the differential equations of the two second-order nonlinear oscillation transformed into a third order nonlinear differential equation which is solved numerical approximate using the Maple program. The solution is compared with asymptotic in a long time range.

Keywords: Pendulum, asymptotic methods, nonlinear waves, nonlinear wavering.