Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 108–111

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Vėlavimas ir ekonominių sistemų dinamika

Donatas Švitra

Klaipėdos universitetas, Gamtos ir matematikos mokslų fakultetas
H. Manto 84, LT-92294 Klaipėda
E. paštas: donatas@ik.ku.lt

Santrauka. Pateikti tam tikri ekonominių sistemų matematiniai modeliai aprašyti diferencialinėmis lygtimis su vėlavimu. Analizė atlikta bifurkacijų teorijos pagalba.

Raktiniai žodžiai: stabilus periodinis sprendinys, bifurkacijų teorija, diferencialinės lygtys su vėlavimu.

1 Įvadas

Vėlavimas, tai yra laiko skirtumas tarp prekių paklausos ir pasiūlos, ekonomikoje iššaukia kainų svyravimus ir verslo ciklus. Toks ciklinis ekonomikos elgesys aprašomas diferencialinėmis lygtimis su vėlavimu.

2 Pastovaus vėlavimo atvejai

Kaleckis [1] savo tiesiniame modelyje

$$\dot{I}(t) = \alpha I(t) - \beta I(t-h), \tag{1}$$

kur $I(t)$ – investicijų kritimas, h – pastovus vėlavimas tarp paklausos ir pasiūlos, o α ir β – konstantos, parodė, kad vėlavimas iššaukia verslo ciklus. Kadangi tiesiniai modeliai negali adekvačiai aprašyti realių procesų, Zakas [7] pasiūlė vėlavimą įvesti į netiesinį Solow [4] modelį. Tokiu būdu, kapitalo dinamikai aprašyti jis nagrinėjo lygtį

$$\dot{K}(t) = \alpha f\big[K(t-h)\big] - \beta K(t-h), \tag{2}$$

kur $f(K)$ – netiesinė neoklasikinė gamybos funkcija. Zakas parodė, kad modelis (2) pusiausvyros būsenos $K = K_*$ aplinkoje egzistuoja ribinis ciklas. Krawiec ir Szydlowski [2] parodė, kad taško $K = K_*$ aplinkoje lygčiai (2) atsiranda stabilus periodinis sprendinys, t. y. įvyksta Hopfo bifurkacija.

Tegul $P(t)$ – produkcijos dinamika, h – laikas, reikalingas jai pagaminti, P_* – vidinė pusiausvyros būsena, r – produkcijos tiesinio augimo koeficientas. Tada produkcijos dinamiką, galima aprašyti diferencialine lygtimi

$$\dot{P}(t) = rP(t-h)\left[1 - \frac{P(t-h)}{P_*}\right]. \tag{3}$$

Gamybos funkcija šiuo atveju bus parabolė $f(P) = rP[1 - \frac{P}{P_*}]$. Toliau atliksime kokybinę modelio (3) analizę.

Lygtis (3) turi dvi pusiausvyros būsenas $P(t) \equiv 0$, $P(t) \equiv P_*$. Akivaizdu, kad nulinė pusiausvyros būsena yra nestabili.

Po kintamųjų pakeitimo

$$P(t) = P_*\left[1 + x\left(\frac{t}{h}\right)\right] \tag{4}$$

gauname diferencialinę lygtį

$$\dot{x}(t) + rhx(t-1) * \big[1 + x(t-1)\big] = 0. \tag{5}$$

Lygties (5) tiesinės dalies charakteringoji lygtis turi gerai žinomas [6] savybes. Kai $0 < rh < \frac{\pi}{2}$ visos jos šaknys turi neigiamas realias dalis, o kai $rh = \frac{\pi}{2}$, charakteringoji lygtis turi porą grynai menamų šaknų $\pm i\frac{\pi}{2}$.

Tegul

$$P(\lambda, \varepsilon) = \lambda + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\exp(-\lambda), \tag{6}$$

o $\lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\sigma_0 = \sigma(0) = \frac{\pi}{2}$, ($|\varepsilon| \ll 1$). Iš tapatybės $P[\lambda(\varepsilon) : \varepsilon] \equiv 0$, seka, kad

$$\tau_0' = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}, \qquad \sigma_0' = \frac{4}{\pi^2 + 4}, \tag{7}$$

kai $\tau_0' = \tau'(\varepsilon)$, $\sigma_0' = \sigma'(\varepsilon)$, $\varepsilon = 0$.

Kadangi $\tau_0' > 0$, tai kai $rh = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, lygčiai (5) tinka bifurkacijų teorijos algoritmas iš [5].

Atlikę laiko pakeitimą $t = (1 + c)\tau$ iš (5), gauname lygtį

$$\frac{1}{1+c}\dot{x} + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)x\left(\tau - \frac{1}{1+c}\right)\left[1 + \left(\tau - \frac{1}{1+c}\right)\right] = 0. \tag{8}$$

Įstatę į (8) eilutes

$$x(\tau, \xi) = \xi\cos\frac{\pi}{2}\tau + \xi^2 x_2(\tau) + \xi^3 x_3(\tau) + \cdots, \tag{9}$$

$$\varepsilon(\xi) = b_2\xi^2 + b_4\xi^4 + \cdots, \tag{10}$$

$$c(\xi) = c_2\xi^2 + c_4\xi^4 + \cdots. \tag{11}$$

Ir prilyginę koeficientus prie ξ^2 ir ξ^3, gauname tiesines nehomogenines diferencialines lygtis

$$x_2' + \frac{\pi}{2}x_2'(\tau - 1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sin\pi\tau, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} x_3' + \frac{\pi}{2}x_3'(\tau - 1) + \left(b_2 + \frac{\pi}{4}c_2\right)\sin\frac{\pi}{2}\tau + \frac{\pi^2}{4}c_2\cos\frac{\pi}{2}\tau \\ = -\pi\sin\frac{\pi}{2}\tau x_2(\tau - 1). \end{aligned} \tag{13}$$

Iš (12) gauname, kad

$$x_2(\tau) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sin\pi\tau - \frac{1}{10}\cos\pi\tau. \tag{14}$$

Diferencialinė lygtis (13) turės periodinį sprendinį, kai

$$b_2 = \frac{11\pi - 4}{20}, \qquad c_2 = \frac{2}{5\pi}. \tag{15}$$

1 teorema. *Jei* $0 < rh - \frac{\pi}{2} = |\varepsilon| \ll 1$, *tai diferencialinė lygtis* (3) *turi vienintelį stabilų periodinį sprendinį*

$$P(t) \equiv P_* \left[1 + \xi \cos\frac{\pi}{2}\tau + \xi^2 x_2(\tau) + \mathrm{O}\big(\xi^3\big)\right], \tag{16}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}, \qquad \tau = \frac{t}{(1 + c_2\xi^2)h}. \tag{17}$$

3 Kintamo vėlavimo atvejai

Mackey [3] rinkos prekių kainų svyravimus pasiūlė aprašyti tokia diferencialine lygtimi

$$\frac{\dot P}{P_D} = D(P) - S\big[P\big(t - \Delta(P)\big)\big], \tag{18}$$

kur D ir S atitinkamai yra prekės paklausos ir pasiūlos funkcijos, o vėlavimas $\Delta(P)$ – monotoniškai mažėjanti prekių kainos atžvilgiu funkcija. Tegul santykinis prekės kainos augimo greitis $\dot P/P$ yra pastovus paklausos atžvilgiu ir mažėjantis pasiūlos atžvilgiu. Tada lygtį (18) galima pakeisti tokia lygtimi

$$\frac{\dot P}{P} = r - \frac{r}{P_*} P\big[t - \Delta(P)\big], \tag{19}$$

kur

$$\Delta(P) = h \exp\left[a\left(1 - \frac{P}{P_*}\right)\right], \tag{20}$$

kur r atspindi pastovią paklausą, o P_* – pusiausvyrinę prekės rinkos kainą, h – pastovus vėlavimas tarp paklausos ir pasiūlos, esant nusistovėjusiai prekės rinkos kainai, $0 \leqslant a < 1$.

Modelis (19) – tai diferencialinė lygtis

$$\dot P = r\left[1 - \frac{P(t - \Delta(P))}{P_*}\right] P \tag{21}$$

su vėlavimu priklausančiu nuo ieškomos funkcijos. Lygtis (21) buvo nagrinėjamas darbe [5], kuriame suformuota sekanti teorema.

2 teorema. *Jei* $rh = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$ *ir* $0 \leqslant a < 1$, *tai lygtis* (21) *pusiausvyros būsenos* $P(t) \equiv P_*$ *aplinkoje turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį* (16)–(17), *kai*

$$x_2(\tau) = -\frac{1}{4}a\pi + \frac{1}{10}(1 - a\pi)\sin \pi\tau + \frac{1}{20}(4 + a\pi)\cos \pi\tau, \tag{22}$$

o b_2 *ir* c_2 *išreiškiami taip*

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{80}\big[6\pi - 4 + 4\pi(1+\pi)a - 5\pi(3+\pi)a^2\big], \\ c_2 &= \frac{1}{40\pi}\big[4 - 4\pi a + 5\pi(3+\pi)a^2\big]. \end{aligned} \tag{23}$$

Nagrinėsime toliau modelį (3), kuriame vėlavimas nėra pastovus, bet priklauso nuo ieškomos funkcijos. tai yra diferencialinę lygtį

$$\dot{P} = rP\bigl(t - \Delta(P)\bigr)\left[1 - \frac{P(t - \Delta(P))}{P_*}\right], \tag{24}$$

kur $\Delta(P)$ – apibrėžiamas formule (20).

Nesunku parodyti, kad lygties (24) nulinė pusiausvyros būsena nestabili, o pusiausvyros būsenos $P(t) \equiv P_*$ aplinkoje, prie $rh > \frac{\pi}{2}$ įvyksta Hopfo bifurkacija, t. y. atsiranda stabilus periodinis sprendinys.

4 Išvados

Ištirtas diferencialinėmis lygtimis su vėlavimu ekonominių modelių pusiausvyros būsenų stabilumas. Remiantis bifurkacijų teorija sukonstruoti stabilūs periodiniai sprendiniai.

Literatūra

[1] M.A. Kalecky. Macroekonomic theory of business cycles. *Econometrica*, **3**(3):327–344, 1935.

[2] A. Krawiec and M. Szydlowski. Investment delay and economic system dynamics. *Delayed Complex Systems, International Workshop.* Dresden, Germany, pp. 5–9, 2009.

[3] M.C. Mackey. Commodity price fluctuations. price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors. *J. Econ. Theory*, **48**:497–509, 1989.

[4] R.M. Solow. A contribution to the theory of economic growth. *J. Econ.*, **70**(1):65–94, 1956.

[5] D. Švitra. Some modifications of the hatchinson equation. *Liet. mat. rink.*, **27**(1):181–194, 1987.

[6] D. Švitra. *Dynamics of Physiological System.* Mokslas, Vilnius, 1989 (in Russian).

[7] P.J. Zak. Kalceckian lags in general equilibrium. *Rev. Pol. Economy*, **11**(3):321–330, 1999.

SUMMARY

Delays and economic systems dynamics
D. Švitra
Some mathematical models in economic systems with delay differential equations were presented. Analysis was made with the help of bifurcation theory.

Keywords: stable periodic solution, theory of bifurcation, differentials equations with delay.