LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 237–242

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Olimpiadinė lygčių sistema

Jurgis Sušinskas, Juozas Juvencijus Mačys

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: jurgis.susinskas@mii.vu.lt, juozas.macys@mii.vu.lt

Santrauka. Vienos lygčių sistemos pavyzdžiu analizuojami sistemų sprendimo ypatumai. Nagrinėjamas kubinių lygčių sprendimas. Yra patarimų pradedančiajam olimpiadininkui.

Raktiniai žodžiai: olimpiados, kubinės lygtys, lygčių sistemos.

61-ojoje Lietuvos mokinių olimpiadoje (Utena, 2012 04 02) vyresnieji (11–12 klasės) sprendė tokį uždavinį:

Išspręskite lygčių sistemą

$$x^3 + x(y-z)^2 = 2, \tag{1}$$
$$y^3 + y(z-x)^2 = 30, \tag{2}$$
$$z^3 + z(x-y)^2 = 16. \tag{3}$$

Sprendimas. Pirmas būdas (žr. [2]). Duotoji lygčių sistema ekvivalenti sistemai

$$x\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2xyz = 2, \tag{4}$$
$$y\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2xyz = 30, \tag{5}$$
$$z\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2xyz = 16. \tag{6}$$

Sudėję dvi pirmas lygtis ir atėmę trečiąją, padaugintą iš 2, gauname

$$(x+y-2z)\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2 + 30 - 2\cdot 16 = 0. \tag{7}$$

Taigi $x^2+y^2+z^2=0$ arba $z=(x+y)/2$. Pirmuoju atveju $x=y=z=0$, tačiau šis trejetas nėra lygčių sistemos sprendinys. (Be to, iš lygčių sistemos matome, kad nė vienas iš skaičių x, y, z negali būti lygus 0.) Vadinasi, bet kuriam lygčių sistemos sprendiniui (x,y,z) galioja lygybė $z=(x+y)/2$. Iš pirmos lygties, padauginę ją iš 4 ir įrašę $2z=x+y$, gauname

$$x\left(5x^2+5y^2+2xy\right) - 4xy(x+y) = 8,$$

o iš antrosios lygiai taip pat

$$y\left(5x^2+5y^2+2xy\right) - 4xy(x+y) = 120.$$

Padauginkime pirmąją lygybę iš 15 ir atimkime antrąją:

$$\begin{aligned} 0 &= 15\cdot 8 - 120 \\ &= (15x-y)\left(5x^2+5y^2+2xy\right) - 60xy(x+y) + 4xy(x+y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 75x^3 - 5x^2y + 75xy^2 - 5y^3 + 30x^2y - 2xy^2 - 56x^2y - 56xy^2 \\
&= 75x^3 - 31x^2y + 17xy^2 - 5y^3 = x^3\bigl(75 - 31t + 17t^2 - 5t^3\bigr),
\end{aligned}
$$

kur $t = y/x$ (kaip jau žinome, $x \neq 0$). Kadangi

$$75 - 31t + 17t^2 - 5t^3 = (3-t)\bigl(5t^2 - 2t + 25\bigr) = 0,$$

tai $t = 3$ arba $5t^2 - 2t + 25 = 0$. Pastaroji lygtis realiųjų šaknų neturi, nes kvadratinio trinario diskriminantas yra neigiamas, vadinasi, $t = 3$. Taigi $y = tx = 3x$ ir $z = (x+y)/2 = 2x$. Dabar iš lygčių sistemos pirmos lygties gauname

$$2 = x^3 + x(y-z)^2 = x^3 + x(3x - 2x)^2 = x^3 + x^3 = 2x^3.$$

Vadinasi, $x^3 = 1$, $x = 1$, $y = 3x = 3$ bei $z = 2x = 2$. Nesunku įsitikinti, kad trejetas $(x, y, z) = (1, 3, 2)$ tenkina lygčių sistemą.

Atsakymas. $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

Mūsų straipsnelio tikslas – panagrinėti šios sistemos sprendimą, bet svarbiausia – pradedantysis olimpiadininkas čia ras patarimų (kurie gali praversti sprendžiant ne tik šį uždavinį).

Antras būdas. Pirmą sprendimo žingsnį atspėti ne taip jau ir lengva – reikia atskliausti, ir tik parašius visas tris lygtis pasidaro aišku, kad verta jas supanašinti:

$$
\begin{aligned}
x^3 + xy^2 - 2xyz + xz^2 &= 2, \\
y^3 + yz^2 - 2xyz + yx^2 &= 30, \\
z^3 + zx^2 - 2xyz + zy^2 &= 16.
\end{aligned}
$$

Taip vėl gauname (4)–(6) lygčių sistemą. Pasižiūrėkime į ją įdėmiau: visose lygtyse kairės pusės dėmenys yra trečiojo laipsnio, o dešinėje – laisvieji nariai (nulinio laipsnio dėmenys). Tokias lygtis paversti homogeninėmis (kad visų dėmenų laipsnis būtų tas pats) paprasta – užtenka kryžmai sudauginti lygtis – (4) ir (5), (4 ir (6), (5) ir (6):

$$
\begin{aligned}
30x\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 60xyz &= 2y\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 4xyz, \\
16x\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 32xyz &= 2z\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 4xyz, \\
16y\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 32xyz &= 30z\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 60xyz.
\end{aligned}
$$

Sutraukę ir suprastinę, gauname

$$
\begin{aligned}
15x\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - y\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) &= 28xyz, \\
8x\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - z\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) &= 14xyz, \\
8x\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) - 15z\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) &= -14xyz.
\end{aligned}
$$

Įdomu, kad dabar iš bet kurių dviejų lygčių gauname tą patį, todėl paprasčiausia sudėti antrą ir trečią lygtis,

$$(8x + 8y - 16z)\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) = 0,$$

o tai ta pati (7) lygtis. Beje, sugalvoti sudėti (4) ir (5) lygtis ir atimti dvigubą (6) (kaip pirmame būde) taip pat nesunku, matant dešines puses 2, 30 ir 16.

Tolesnis planas aiškus. Kadangi $x = y = z = 0$ netinka pradinei sistemai, tai $x + y = 2z$. Dabar galima išsireikšti bet kurį kintamąjį kitais, gauti homogeninę trečiojo laipsnio lygtį ir nesunkiai įsitikinti, kad ji turi vienintelį sprendinį.

Beje, apie lygties

$$5t^3 - 17t^2 + 31t - 75 = 0$$

sprendimą. Jeigu apie kubinę lygtį nieko nežinome, išspręsti ją nėra paprasta (pirmame būde apie tai nekalbama). Vis dėlto kubinę lygtį su sveikaisiais koeficientais nesunku išspręsti, jeigu ji turi bent vieną racionaliąją šaknį. Racionaliosios šios lygties šaknys tegali būti pavidalo $\pm\frac{m}{n}$, kur m – skaičiaus $75 = 3 \cdot 5^2$, o n – skaičiaus 5 daliklis (žr., pvz., [3]). Be to, matome, kad $t > 0$, – kitaip kairė lygties pusė neigiama. Taigi reikia perrinkti skaičius $75, 25, 15, 5, 3, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$. Įsitikiname, kad $t = 3$ tinka, o tada daugiau jau nieko nebereikia – kairę pusę lengva išskaidyti, nes joje bus daugiklis $t - 3$.

Yra ne viena galimybė skaidyti. Viena jų – dalyba kampu (žr., pavyzdžiui, [1]): padaliję $5t^3 + 17t^2 + 31t - 75$ iš $t - 3$, gauname $5t^2 - 2t + 25$. Kita galimybė – vis papildyti daugianarį reikiamais dėmenimis:

$$\begin{aligned}
5t^3 - 17t^2 + 31t - 75 &= 5t^3 - 15t^2 + 15t^2 - 17t^2 + 31t - 75 \\
&= 5t^2(t-3) - 2t^2 + 31t - 75 \\
&= 5t^2(t-3) - 2t^2 + 6t - 6t + 31t - 75 \\
&= 5t^2(t-3) - 2t(t-3) + 25t - 75 \\
&= (t-3)\bigl(5t^2 - 2t + 25\bigr).
\end{aligned}$$

Pagaliau, trečia galimybė – keisti $t \to u + 3$. Tada lygtis turės sprendinį $u = 0$ ir virs

$$5(u+3)^3 - 17(u+3)^2 + 31(u+3) - 75 = 0,$$
$$(u+3)^2(5u + 15 - 17) + 31u + 18 = 0.$$

Atlikę veiksmus, gauname

$$5u^3 + 28u^2 + 64u = 0.$$

Ši lygtis taip pat kubinė, bet didelio mokslo ją spręsti nereikia: užtenka iškelti u.

Beje, mintis parašyti šį straipsnelį gimė olimpiados vertinimo komisijoje diskutuojant, ar sprendžiant sistemą neišvengiamai tenka spręsti kubinę lygtį. Paskutinis būdas beveik atsako į klausimą. Bet vėliau pamatysime, kad galima iš viso išsisukti nuo kubinės lygties sprendimo.

Trečias būdas. Spręskime sistemą iš naujo.

1. Pabandykime atspėti sprendinį. Ypač paprasta atspėti sveikuosius sprendinius (žinoma, kai jų yra). Iš (1) lygties $x(x^2 + (y-z)^2) = 2$ aišku, kad $x > 0$. Panašiai iš (2) ir (3) $y > 0$, $z > 0$. Tada atmetame antruosius dėmenis: $x^3 \leqslant 2$, $y^3 \leqslant 30$, $z^3 \leqslant 16$, t. y. $x \leqslant 1$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 2$. Bet taip pat aišku, kad $y \neq z$, nes priešingu atveju $x^3 = 2$, o 2 nėra sveikojo skaičiaus kubas. Panašiai $x \neq z$, $x \neq y$. Vadinasi, vienintelė galimybė yra $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$. Patikriname – sprendinys tinka. Taigi yra vienintelis sveikasis sprendinys $(1, 3, 2)$. Toks panagrinėjimas prieš sprendžiant labai vertingas: kaip lygtis bepertvarkinėtume, šios reikšmės turi duoti lygybę. Taigi sprendinio žinojimas labai padeda savikontrolei (pavyzdžiui, atliekant gremėzdiškus pertvarkymus), be to, pamatysime, kaip paprasta spręsti lygtis, žinant sprendinį.

2. Kalbėkime apie visus (ne tik sveikuosius) sprendinius. Vėl $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Tuo taip pat ne kartą remsimės. Beje, aišku ir kad $y \neq z$: kitaip būtų $y^3 + y(y-x)^2 = 30$, $y^3 + y(y-x)^2 = 16$ – prieštara. Panašiai $x \neq z$, $x \neq y$.

3. Kadangi kairiosios pusės homogeninės, atsikratome laisvųjų narių – sudedame (1) ir (2) lygtis ir atimame dvigubą (3) lygtį:

$$x^3 + x\big(y^2 - 2yz + z^2\big) + y^3 + y\big(z^2 - 2zx + x^2\big) - 2z^3 - 2z(x^2 - 2xy + y^2) = 0,$$
$$x^3 + xy^2 + xz^2 + y^3 + yz^2 + yx^2 - 2z^3 - 2zx^2 - 2zy^2 = 0,$$
$$x\big(x^2 + y^2 + z^2\big) + y\big(y^2 + z^2 + x^2\big) - 2z\big(z^2 + x^2 + y^2\big) = 0.$$

Bet $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, todėl $x + y - 2z = 0$.

Išsireiškiame y (neverta išsireikšti z, nes atsiras trupmenų, ir sprendžiant koeficientai didės): $y = 2z - x$. Įstačius šią išraišką į pradinę sistemą, liks tik x ir z, taigi užtenka dviejų lygčių. Renkamės (1) ir (3) lygtis – čia koeficientai mažesni:

$$x^3 + x(z-x)^2 = 2, \qquad z^3 + z\big(2x - 2z\big)^3 = 16.$$

Vėl atsikratome laisvųjų narių – lygtis dauginame kryžmai:

$$8x^3 + 8x(z-x)^2 = z^3 + z(2x - 2z)^2. \tag{8}$$

Turime homogeninę lygtį, vadinasi, verta dalyti ją iš x^3 ar z^3. Pasvarstykime, ką geriau turėti, x/z ar z/x. Kadangi tinka $x = 1$, $z = 2$ (dar kartą pasitikrinome!), tai patogiau z/x, todėl dalijame iš x^3 (žinome, kad $x \neq 0$):

$$8 + 8\left(\frac{z}{x} - 1\right)^2 = \left(\frac{z}{x}\right)^3 + \frac{z}{x}\left(2 - 2\frac{z}{x}\right)^2.$$

Pažymėję $z/x = t$, turime lygtį

$$8 + 8t^2 - 16t + 8 = t^3 + 4t - 8t^2 + 4t^3,$$
$$5t^3 - 16t^2 + 20t - 16 = 0,$$

ir žinome, kad ją tenkina $t = 2$. Todėl išskaidyti paprasta:

$$5t^3 - 20t^2 + 20t + 4t - 16 = 0, \qquad 5t(t-2)^2 + 4\big(t^2 - 4\big) = 0,$$
$$(t-2)\big(5t^2 - 6t + 8\big) = 0.$$

Kadangi trinario diskriminantas neigiamas, tai trinaris teigiamas, todėl $t = 2$. Grįžtame prie x ir z, tada $z/x = 2$, $z = 2x$, o $y = 2z - x = 4x - x = 3x$. Įstatę y ir z išraiškas, pavyzdžiui, į (1) lygtį, turime

$$x^3 + x \cdot x^2 = 2, \qquad 2x^3 = 2, \qquad x^3 = 1,$$

t. y., $x = 1$. Trejetas $(1, 3, 2)$ tenkina sistemą.

Padarysime dar vieną pastabą. (8) lygtį galima spręsti ir neįsivedus naujų kintamųjų (žinoma, iš esmės tai tas pat). Kadangi ją tenkina $x = 1$, $z = 2$, tai spėjame (ir įsitikiname), kad ją tenkina $z = 2x$: tikrai, $8x^3 + 8x \cdot x^2 = 8x^3 + 2x \cdot 4x^2$. Vadinasi, dėmenis galima kelti į vieną pusę ir išskirti daugiklį $z - 2x$:

$$z^3 - 8x^3 + 4z(x-z)^2 - 8x(z-x)^2 = 0,$$
$$(z - 2x)\big(z^2 + 2xz + 4x^2\big) + 4(x-z)^2(z - 2x) = 0,$$
$$(z - 2x)\big(5z^2 - 6zx + 8x^2\big) = 0.$$

Antruosiuose skliaustuose išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$5z^2 - 6zx + 8x^2 = \frac{1}{5}\big(25z^2 - 30zx + 40x^2\big)$$
$$= \frac{1}{5}\big[(5z-3x)^2 - 9x^2 + 40x^2\big] = \frac{1}{5}\big[(5z-3x)^2 + 31x^2\big].$$

Kadangi šis reiškinys teigiamas (juk $x \neq 0$), tai $z = 2x$.

Ketvirtas būdas. Ir vis dėlto – ar egzistuoja būdas, kai iš viso nereikia spręsti kubinės lygties? Spręskite patys, kiek siūlomas būdas galėtų vadintis tokiu. Kaip ir anksčiau, gauname sąryšį $y = 2z - x$. Įrašykime y išraišką į (1) ir (3) lygtis:

$$x^3 + x(x-z)^2 = 2, \qquad z^3 + 4z(x-z)^2 = 16.$$

Eliminuokime $(x-z)^2$:

$$4x^3z + 4xz(x-z)^2 = 8z, \qquad xz^3 + 4xz(x-z)^2 = 16x.$$

Atimkime lygtis vieną iš kitos:

$$xz\big(4x^2 - z^2\big) = 8(z - 2x).$$

Įrodykime, kad $z = 2x$. Tarkime priešingai, – kad $z \neq 2x$. Tada lygtį galime dalyti iš $2x - z \neq 0$:

$$xz(2x + z) = -8.$$

Bet žinome, kad $x > 0$, $z > 0$, taigi kairė pusė teigiama, – prieštara. Vadinasi, $z = 2x$, o toliau viską jau matėme.

Penktas būdas. Na, ir pagaliau gražus būdas, nieko bendra neturintis su ankstesniais (jame remiamasi simetriniais trijų kintamųjų daugianariais). Perrašykime (4)–(6) lygtis taip:

$$x\big(x^2+y^2+z^2\big) = 2 + 2xyz, \qquad y\big(x^2+y^2+z^2\big) = 30 + 2xyz,$$
$$z\big(x^2+y^2+z^2\big) = 16 + 2xyz.$$

Matome, kad jose kartojasi reiškiniai $x^2+y^2+z^2$ ir xyz. Kyla mintis – o gal galima pasiekti, kad liktų tik jie? Pasirodo, tam yra net dvi galimybės: viena – lygtis sudauginti, kita – lygtis pakelti kvadratu ir sudėti:

$$xyz\big(x^2+y^2+z^2\big)^3 = (2+2xyz)(30+2xyz)(16+2xyz),$$
$$\big(x^2+y^2+z^2\big)^3 = (2+2xyz)^2 + (30+2xyz)^2 + (16+2xyz)^2.$$

Pažymėję $xyz = u$, $x^2+y^2+z^2 = v$, turime sistemą su dviem nežinomaisiais:

$$uv^3 = (2+2u)(30+2u)(16+2u), \tag{9}$$
$$v^3 = (2+2u)^2 + (30+2u)^2 + (16+2u)^2. \tag{10}$$

Įstatome v^3 iš antrosios lygties į pirmąją:

$$u\big[(2+2u)^2 + (30+2u)^2 + (16+2u)^2\big] = (2+2u)(30+2u)(16+2u).$$

Dalijame iš 4:

$$u\big[(1+u)^2+(15+u)^2+(8+u)^2\big]=(1+u)(15+u)(16+2u).$$

Gavome kubinę lygtį, o jas spręsti jau mokame: kadangi $u=xyz$, tai lygtis turi sprendinį $u=1\cdot 3\cdot 2=6$. Pasitikriname, ar nepadarėme aritmetinių klaidų:

$$6\big(7^2+21^2+14^2\big)=7\cdot 21\cdot 28.$$

Ši lygybė ekvivalenti padalytai iš 7^2,

$$6\big(1^2+3^2+2^2\big)=7\cdot 3\cdot 4, \qquad 1+9+4=7\cdot 2,$$

taigi teisinga. Vadinasi, mūsų kubinė lygtis

$$u\big(290+48u+3u^2\big)=\big(15+16u+u^2\big)(16+2u)$$

turi sprendinį $u=6$, ir ją spręsti paprasta:

$$290u+48u^2+3u^3=240+286u+48u^2+2u^3,$$

$$u^3+4u-240=0. \tag{11}$$

Grupuojame: $u^3-36u+40u-240=0$, $u(u^2-36)+40(u-6)=0$, $(u-6)(u^2+6u+40)=0$, $(u-6)[(u+3)^2+31]=0$. Vadinasi, $u=6$, tada iš (9) lygties

$$6v^3=14\cdot 42\cdot 28, \quad v^3=14\cdot 14\cdot 14, \quad v=14.$$

Dabar iš (4) lygties $x\cdot 14-12=2$, $x=1$. Iš (5) lygties $y\cdot 14-12=30$, $y=3$, iš (6) lygties $z\cdot 14-12=16$, $z=2$. Sprendimas baigtas.

Beje, jei kam nors pasirodytų, kad ir (11) lygties koeficientai per dideli, tai galima įsivesti naują kintamąjį $u=6w$ (tada lygtis turės šaknį $w=1$!):

$$6^3w^3+4\cdot 6w-240=0, \qquad 6^2w^3+4w-40=0, \qquad 9w^3+w-10=0.$$

Čia grupuoti visai lengva, pavyzdžiui,

$$9w^3-9w+10w-10=0, \qquad 9w(w^2-1)+10(w-1)=0, \qquad (w-1)(9w^2+9w+10)=0.$$

Trinario diskriminantas neigiamas, trinaris teigiamas, taigi $w=1$, tada $u=6$.

Literatūra

[1] A. Apynis ir E. Stankus. *Racionaliosios lygtys.* Kn.: Jaunajam matematikui, nr. 10. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2009, pp. 11–13. Adresas internete: http://www.mif.vu.lt/ljmm (Užduotys. Užduočių archyvas).

[2] A. Dubickas. *2012 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai.* Adresas internate: http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/.

[3] R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.* Kn.: Jaunajam matematikui, nr. 5. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2004, p. 71–73. Adresas internete: http://www.mif.vu.lt/ljmm (Užduotys. Užduočių archyvas).

SUMMARY

An olympiadic system of equations

J. Sušinskas, J.J. Mačys

Solution of an olympiadic system with three variables is considered. Solution of cubic equations is discussed. Some advices for young olympiadists are given.

Keywords: olympiads, cubic equations, systems of equations.