LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 29–33

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Glaustinės kreivės ir glaustiniai paviršiai

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjama n-matės ($n = 2, 3$) Euklido erdvės kreivių ir paviršių diferencialinė geometrija, analizuojant jų kontaktą su tokiais įvairiais standartiniais geometriniais modeliais, kaip glaustinės aukštesniųjų eilių algebrinės kreivės ir glaustiniai algebriniai paviršiai. Glaustinių kreivių ir paviršių panaudojomas leidžia analizuoti duotosios kreivės arba paviršiaus vidines savybes, kurios priklauso nuo aukštesniųjų eilių išvestinių [1].

Raktiniai žodžiai: kreivė, glaustinis apskritimas, glaustinė kreivė, glaustinė sfera, glaustinis paviršius.

1. Tarkime, kad Euklido plokštumos kreivė γ apibrėžta parametrinėmis lygtimis γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Kreivės γ taškui $M(x(t); y(t))$ galime priskirti glaustinį apskritimą $OC_M(\gamma)$: $f = 0$; čia $f = \det[U - V, V', V'']$ ir $U^t = [X^2 + Y^2, X, Y]$, $V^t = [x^2 + y^2, x, y]$ yra matricos-eilutės. Glaustinis apskritimas $OC_M(\gamma)$ su kreive γ taške M turi antrosios eilės lietimąsi. Šio apskritimo spindulį R ir centro koordinates aprašo klasikinės formulės:

$$R^2 = \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x' \cdot y'' - x'' \cdot y')^2}, \qquad \begin{cases} x_C = x - \dfrac{x'^2 + y'^2}{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'} \cdot y', \\ y_C = y + \dfrac{x'^2 + y'^2}{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'} \cdot x'. \end{cases}$$

Kreivės γ taškui M priskirkime glaustinę parabolę $OP_M(\gamma)$: $f = 0$; čia $f = \det[U - V, V', V'']$ ir $U^t = [(X + Y)^2, X, Y]$, $V^t = [(x + y)^2, x, y]$ yra matricos-eilutės. Glaustinė parabolė su kreive γ taške M turi antrosios eilės lietimąsi. Glaustinės parabolės fokalinis parametras

$$p = \frac{\sqrt{2} \cdot (a_{13} - a_{23})}{4 \cdot a_{11}}$$

ir viršūnės koordinatės:

$$\begin{cases} x_V = \dfrac{a_{13}^2 + 6 \cdot a_{13} \cdot a_{23} + 5 \cdot a_{23}^2 + 4 \cdot a_{11} \cdot a_{33}}{8 \cdot a_{11} \cdot (a_{13} - a_{23})}, \\ y_V = -X_V - \dfrac{a_{13} + a_{23}}{2 \cdot a_{11}}, \end{cases}$$

čia

$$\begin{gathered}
a_{11} = x' \cdot y'' - x'' \cdot y', \\
a_{13} = -a_{11} \cdot (x+y) + y' \cdot (x'+y')^2, \\
a_{23} = -a_{11} \cdot (x+y) - x' \cdot (x'+y')^2, \\
a_{33} = a_{11} \cdot (x+y)^2 + 2 \cdot (x' \cdot y - x \cdot y') \cdot (x'+y')^2.
\end{gathered}$$

Glaustinę antrosios eilės kreivę $OC_M^{(2)}(\gamma)$, turinčią 4-osios eilės lietimąsi su kreive γ jos taške M, apbrėšime lygtimi $OC_M^{(2)}(\gamma)$: $f=0$, kurioje $f = \det[U-V, V', V'', V^{(3)}, V^{(4)}]$ ir

$$\begin{gathered}
U^t = [U_2, U_1], \qquad V^t = [V_2, V_1], \qquad U_2^t = [X^2, X \cdot Y, Y^2], \qquad U_1^t = [X, Y], \\
V_2^t = \left[x^2, x \cdot y, y^2\right], \qquad V_1^t = [x, y]
\end{gathered}$$

yra matricos-eilutės.

Panašiai galime užrašyti aukštesniųjų eilių glaustinių kreivių lygtis. k-osios eilės glaustinę kreivę $OC_M^{(k)}(\gamma)$ apibrėšime lygtimi $OC_M^{(k)}$: $f=0$, kurioje $f = \det[U - V, V', V^{(2)}, \ldots, V^{(n_k)}]$ ir

$$\begin{gathered}
U^t = [U_k, U_{k-1}, \ldots, U_1], \qquad V^t = [V_k, V_{k-1}, \ldots, V_1], \qquad U_q^t = \left[X^{q-p} \cdot Y^p\right]_{p=0}^q, \\
V_q^t = \left[x^{q-p} \cdot y^p\right]_{p=0}^q, \quad q = 1, 2, \ldots, k, \ n_k = \frac{k \cdot (k+3)}{2} - 1.
\end{gathered}$$

Glaustinė k-osios eilės kreivė $OC_M^{(k)}(\gamma)$ taške Msu kreive γ turi n_k-osios eilės lietimąsi.

2. Nagrinėkime plokščiąją kreivę γ, apibrėžtą neišreikštine lygtimi γ: $F(x,y)=0$. Jei γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$ yra kreivės γ parametrizacija, tai $x' = \lambda \cdot F_y$, $y' = -\lambda \cdot F_x$; čia $\lambda = \lambda(x,y)$-proporcingumo daugiklis ir $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \ldots$ yra dalinės išvestinės. Šiuo atveju

$$\begin{gathered}
x'^2 + y'^2 = \lambda^2 \cdot \left(F_x^2 + F_y^2\right), \\
x' \cdot y'' - x'' \cdot y' = \lambda^3 \cdot \Delta; \quad \Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.
\end{gathered}$$

Kreivės γ: $F(x,y)=0$ glaustinio apskritimo spindulys R randamas iš lygybės

$$R^2 = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^3}{\Delta^2},$$

o jo centro koordinatės:

$$\begin{cases}
x_C = x + \dfrac{F_x^2 + F_y^2}{\Delta} \cdot F_x, \\[2ex]
y_C = y + \dfrac{F_x^2 + F_y^2}{\Delta} \cdot F_y.
\end{cases}$$

Kreivės γ: $F(x,y)=0$ glaustinės parabolės taške $M\in\gamma$ fokalinis parametras

$$p=\frac{\sqrt{2}\cdot(F_y-F_x)^3}{4\cdot\varDelta},$$

o viršūnės koordinatės:

$$\begin{cases} x_V=\dfrac{a_{13}^2+6\cdot a_{13}\cdot a_{23}+5\cdot a_{23}^2+4\cdot a_{11}\cdot a_{33}}{8\cdot a_{11}\cdot(a_{13}-a_{23})}, \\ y_V=-X_V-\dfrac{a_{13}+a_{23}}{2\cdot a_{11}}, \end{cases}$$

čia

$$\begin{aligned} a_{11}&=\varDelta,\\ a_{13}&=-(x+y)\cdot\varDelta-(F_y-F_x)^2\cdot F_x,\\ a_{23}&=-(x+y)\cdot\varDelta-(F_y-F_x)^2\cdot F_y,\\ a_{33}&=(x+y)^2\cdot\varDelta+2\cdot(F_y-F_x)^2\cdot(x\cdot F_x+y\cdot F_y). \end{aligned}$$

Kreivės γ: $F(x,y)=0$ atveju ivestines $\frac{d^px}{dt^p}$ ir $\frac{d^py}{dt^p}$ $(p=1,2,\dots)$ galime apskaičiuoti diferencialinio operatoriaus $\partial^{\#}=F_y\cdot\frac{\partial}{\partial x}-F_x\cdot\frac{\partial}{\partial y}$ pagalba. Jei $\partial^{\#}_p=\partial^{\#}\circ\dots\circ\partial^{\#}$ (p kartų), tai

$$\frac{d^px}{dt^p}=\lambda^p\cdot\partial^{\#}_p x+(\cdots),\qquad \frac{d^py}{dt^p}=\lambda^p\cdot\partial^{\#}_p y+(\cdots),$$

čia $(\cdots)$ žymi dėmenis, kurie priklauso nuo daugiklio λ išvestinių. Išvestinių $\frac{d^px}{dt^p}$ ir $\frac{d^py}{dt^p}$ $(p=1,2,\dots)$ reikšmės dabar mums leidžia užrašyti norimos eilės glaustinių kreivių lygtis kreivei γ: $F(x,y)=0$.

3. Trimatės Euklido erdvės kreivės γ: $\vec r=\vec r(t)=\{x(t);y\ (t);z(t)\}$ taške $M(x(t);y(t);z(t))$ judamąjį trisienį sudaro vienetiniai vektoriai

$$\vec\tau=\frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|},\quad \vec\nu=\frac{(\vec{r'}\times\vec{r''})\times\vec{r'}}{|(\vec{r'}\times\vec{r''})\times\vec{r'}|},\vec\beta=\frac{\vec{r'}\times\vec{r''}}{|\vec{r'}\times\vec{r''}|}.$$

Šios kreivės glaustinis apskritimas $OC_M(\gamma)$ yra glaustinės plokštumos $O_M(\gamma)$ taške M sankirta su glaustine sfera $OS_M(\gamma)$ taške M: $OC_M(\gamma)=O_M(\gamma)\cap OS_M(\gamma)$. Glaustinės sferos $OS_M(\gamma)$ centro $C(x_C;y_C;z_C)$ radiusas-vektorius

$$\vec{r_C}=\vec r(t)+r\cdot\vec\nu-\frac{k'}{k^2\cdot\kappa\cdot|\vec{r'}|}\cdot\vec\beta,$$

čia

$$k=\frac{|\vec{r'}\times\vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3}\quad\text{ir}\quad\kappa=\frac{(\vec{r'},\vec{r''},\vec{r'''})}{(\vec{r'},\vec{r''})^2}$$

yra kreivės γ kreivumas ir sukinys taške M; $r=\frac{1}{k}$ – kreivumo spindulys. Glaustinės sferos $OS_M(\gamma)$ spindulys R randamas iš lygybės

$$R^2=\frac{1}{k^2}\cdot\left[1+\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{k'}{\kappa\cdot|\vec{r'}|}\right)^2\right].$$

Šiame darbe įrodoma tokia teorema.

1 teorema. *Glaustinę sferą $OS_M(\gamma)$apibrėžia lygtis $OS_M(\gamma)$: $f = 0$, kurioje*

$$f = \det\big[U - V, V', V'', V^{(3)}\big] \quad ir \quad U^t = \big[X^2 + Y^2 + Z^2, X, Y, Z\big],$$
$$V^t = \big[x^2 + y^2 + z^2, x, y, z\big]$$

matricos-eilutės.

Per 9 be galo artimus kreivės γ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ taškus galime išvesti antrosios eilės glaustinį paviršių $OS^{(2)}_M(\gamma)$: $f = 0$, turintį 8-osios eilės lietimąsi su kreive γ taške M; čia

$$f = \det\big[U - V, V', \dots, V^{(8)}\big],$$
$$U^t = \big[X^2, X\cdot Y, X\cdot Z, Y^2, Y\cdot Z, Z^2, X, Y, Z\big],$$
$$V^t = \big[x^2, x\cdot y, x\cdot z, y^2, y\cdot z, z^2, x, y, z\big].$$

Kiekvieną parametro t reikšmę (t. y. kreivės γ tašką M) atitinka konkretus glaustinis antrosios eilės paviršius $OS^{(2)}_M(\gamma)$. Jis gali būti elipsoidas, vienašakis hiperboloidas, hiperbolinis paraboloidas, elipsinis paraboloidas, kūgis, cilindras ir t. t. Glaustinės plokštumos $O_M(\gamma)$ ir glaustinio antrosios eilės paviršiaus $OS^{(2)}_M(\gamma)$ sankirtos kreivė yra kreivės γ glaustinė kreivė (pvz., elipsė, hiperbolė, parabolė) taške M.

Kreivės γ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ k-osios eilės glaustinį paviršių $OS^{(k)}_M(\gamma)$ apibrėšime lygtimi $OS^{(k)}_M(\gamma)$: $f = 0$, kurioje

$$f = \det\big[U - V, V', V^{(2)}, \dots, V^{(N_k)}\big], \qquad U^t = [U_k, U_{k-1}, \dots, U_1],$$
$$V^t = [V_k, V_{k-1}, \dots, V_1], \qquad U^t_m = \big[X^p\cdot Y^q\cdot Z^r\big], \qquad V^t_m = \big[x^p\cdot y^q\cdot z^r\big],$$
$$p + q + r = m,\ m = 1, 2, \dots, k, \quad N_k = \frac{1}{6}\cdot k\cdot\big(k^2 + 6\cdot k + 11\big).$$

Glaustinis k-osios eilės paviršius $OS^{(k)}_M(\gamma)$ su kreive γ jos taške M turi N_k eilės lietimąsi.

4. Tarkime, kad erdvinė kreivė γ apibrėžta dviejų paviršių sankirta:

$$\gamma\colon \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Jei

$$\gamma\colon \vec{r} = \vec{r}(t) = \big\{x(t); y(t); z(t)\big\}$$

yra kreivės γ parametrizacija, tai $x' = \lambda\cdot T_x$, $y' = \lambda\cdot T_y$, $z' = \lambda\cdot T_z$; čia

$$T_x = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \qquad T_y = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \qquad T_z = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix},$$

$\lambda = \lambda(x, y, z)$ – proporcingumo daugiklis. Diferencialinio operatoriaus

$$\partial^{\#} = T_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + T_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + T_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

pagalba galima apibrėžti kitus diferencialinius operatorius

$$\partial_p^{\#} = \partial^{\#} \circ \cdots \circ \partial^{\#} \quad (p \text{ kartų}).$$

Išvestinių

$$\frac{d^p x}{dt^p} = \lambda^p \cdot \partial_p^{\#} x + (\cdots), \qquad \frac{d^p y}{dt^p} = \lambda^p \cdot \partial_p^{\#} y + (\cdots), \qquad \frac{d^p z}{dt^p} = \lambda^p \cdot \partial_p^{\#} z + (\cdots)$$

reikšmės leidžia užrašyti norimos eilės glaustinių paviršių lygtis aptariamu atveju; čia $(\cdots)$ žymi dėmenis, kurie priklauso nuo daugiklio λ išvestinių.

5. Paviršiaus

$$S\colon \vec{r} = \vec{r}(u,v) = \bigl\{x(u,v);\ y(u,v);\ z(u,v)\bigr\}$$

kreivę γ galima apibrėžti vidinėmis lygtimis $u = u(t)$, $v = v(t)$. Tokiu atveju kreivės γ parametrinės lygtys

$$\gamma\colon x = x\bigl(u(t), v(t)\bigr), \qquad y = y\bigl(u(t), v(t)\bigr), \qquad z = z\bigl(u(t), v(t)\bigr)$$

arba $\gamma\colon x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Kreivės γ taškui $M \in \gamma \subset S$ galime priskirti norimos eilės glaustinius paviršius pagal anksčiau pateiktas formules.

Literatūra

[1] W. Blaschke. *Affine Differentiakgeometrie*. Berlin, 1923.

SUMMARY

Osculating curves and surfaces

K. Navickis

Osculating circle and osculating sphere have been studied in classical differential geometry [1]. In this article the osculating curves and surfaces of higher order of plane and space curves in Euclidean n-space ($n = 2, 3$) is considered. We study the intrinsic differential geometry of curves by analyzing their contact with curves and surfaces of higher order.

Keywords: curve, osculating circle, osculating curve, osculating sphere, osculating surface.