LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 34–36

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Prekių kainos dinamikos modelis su kintamu vėlavimu

Raimondas Barzdžiukas, Osvaldas Švitra, Ramunė Vilkytė

Klaipėdos universitetas, Gamtos ir matematikos mokslų fakultetas
H. Manto g. 84, LT-92294 Klaipėda
E. paštas: logit2@inbox,lt, donatas@ik.ku.lt, vilkramune@gmail.com

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamas prekių kainos augimo modelis, kuriame vėlavimas priklauso nuo ieškomo sprendinio, t. y. prekių kainos. Bifurkacijų teorijos pagalba sukonstruotas modelio stabilus periodinis sprendinys.

Raktiniai žodžiai: prekės kaina, dinaminis modelis, diferencialinė lygtis, vėlavimas.

Modelio formulavimas

Tegul $P(t)$ – prekės kaina, r – tiesinis prekių kainos augimo greitis, h – pastovus vėlavimas tarp paklausos ir pasiūlos, esant nusistovėjusiai prekės kainai P_*, parametras $a \in (0;1)$. Tada rinkos prekių kainos dinamiką galima aprašyti diferencialine lygtimi [4]

$$\dot{P} = rP(t-\Delta)\left[1 - \frac{P(t-\Delta)}{P_*}\right], \tag{1}$$

kur

$$\Delta = \Delta(P) \quad \text{ir} \quad \Delta(P) = h\exp\left[a\left(1 - \frac{P}{P_*}\right)\right]. \tag{2}$$

Lygtis (1), kai $a = 0$, teoriškai ištirta darbe [4]. Skaitinis lygties (1) sprendinys, gautas darbe [1], palygintas su išanalizuotais 9 metų svyravimų ciklais [5], ir su Klaipėdos uosto ataskaitose užfiksuota cikline krovos dinamika.

1 Kokybinė modelio analizė

Lygtis (1) turi dvi pusiausvyros būsenas: $P(t) \equiv 0$ ir $P(t) \equiv P_*$. Nesunku parodyti, kad nulinė pusiausvyros būsena nestabili. Po kintamųjų pakeitimo

$$P(t) = P_*\left[1 + x\left(\frac{t}{h}\right)\right], \tag{3}$$

gauname diferencialinę lygtį

$$\dot{x} + rhx\big[t - \exp(-ax)\big]\big\{1 + x\big[t - \exp(-ax)\big]\big\} = 0. \tag{4}$$

Lygties (4) tiesinės dalies charakteringoji lygtis

$$\lambda + rh\exp(-\lambda) = 0 \tag{5}$$

turi gerai žinomas savybes [3]. Kai $0 < rh < \pi/2$, visos (5) šaknys turi neigiamas realias dalis, o kai $rh = \pi/2$, lygtis (5) turi porą grynai menamų šaknų $\pm i\pi/2$.

Tegul

$$P(\lambda;\varepsilon) = \lambda + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\exp(-\lambda), \tag{6}$$

o $\lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0 = \pi/2$, $|\varepsilon| \ll 1$.

Iš tapatybės $P(\lambda;\varepsilon) \equiv 0$ seka, kad

$$\tau_0' = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}, \qquad \sigma_0' = \frac{4}{\pi^2 + 4}, \tag{7}$$

kur $\tau_0' = \tau'(\varepsilon)$, $\sigma_0' = \sigma'(\varepsilon)$, $\varepsilon = 0$.

Kadangi $\tau_0' > 0$, tai prie $rh = \pi/2 + \varepsilon$ lygčiai (4) tinka bifurkacijos teorijos algoritmas iš [3].

Atlikę laiko pakeitimą $t = (1 + c)\tau$ iš (4) lygties gauname lygtį

$$\frac{1}{1+c}x' + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)x\left(\tau - \frac{e^{-ax}}{1+c}\right)\left[1 + x\left(\tau - \frac{e^{-ax}}{1+c}\right)\right] = 0. \tag{8}$$

Į (8) lygtį įstatome (9)–(11) eilutes:

$$x(\tau;\xi) = \xi\cos\frac{\pi}{2}\tau + \xi^2 x_2(\tau) + \xi^3 x_3(\tau) + \cdots, \tag{9}$$

$$\varepsilon(\xi) = b_2\xi^2 + b_4\xi^4 + \cdots, \tag{10}$$

$$c(\xi) = c_2\xi^2 + c_4\xi^4 + \cdots. \tag{11}$$

Ir prilyginę koeficientus prie ξ^2 ir ξ^3, mes gauname tiesines nehomogenines diferencialines lygtis:

$$x_2' + \frac{\pi}{2}x_2(\tau - 1) = -\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2}a\right) + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{2}a\right)\cos\pi\tau, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&x_3' + \frac{\pi}{2}x_3(\tau - 1) + \left(b_2 + \frac{\pi}{2}c_2\right)\sin\frac{\pi}{2}\tau + \frac{\pi^2}{4}c_2\cos\frac{\pi}{2}\tau \\
&\quad = -a\frac{\pi^2}{4}x_2\cos\frac{\pi}{2}\tau + a^2\frac{\pi^2}{8}\cos^3\frac{\pi}{2}\tau - a\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\tau x_2'(\tau - 1) \\
&\qquad + a\frac{\pi^2}{2}\left(a\frac{\pi}{8} - 1\right)\sin\frac{\pi}{2}\tau\cos^2\frac{\pi}{2}\tau - \pi\sin\frac{\pi}{2}\tau x_2(\tau - 1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Iš (12) lygties gauname, kad

$$x_2(\tau) = -\frac{2 + \pi a}{4} + \frac{2 - \pi a}{10}\sin\pi\tau - \frac{2 - \pi a}{20}\cos\pi\tau. \tag{14}$$

Diferencialinė lygtis (13) turės periodinį sprendinį, kai:

$$b_2 = \frac{11\pi - 4}{20} + a\frac{4\pi^2 - 11\pi}{40} + a^2\frac{\pi^3 - 4\pi^2 - 12\pi}{64}, \tag{15}$$

$$c_2 = \frac{2}{5\pi} + a\frac{11}{20} + a^2\frac{\pi + 3}{8}. \tag{16}$$

Remiantis aukščiau gautais rezultatais galime užrašyti teoremą, kurios įrodymas pateiktas [2, 3].

1 teorema. *Jei $rh = \pi/2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ ir $0 \le a < 1$, tai diferencialinė lygtis* (1) *pusiausvyros būsenos $P(t) \equiv P_*$ aplinkoje turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį*

$$P(t) = P_*\left[1 + \xi \cos\frac{\pi}{2}\tau + \xi^2 x_2(\tau) + O\bigl(\xi^3\bigr)\right], \tag{17}$$

kur

$$\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}, \qquad \tau = \frac{t}{(1 + c_2\xi^2)h}, \tag{18}$$

o $x_2(\tau)$, b_2 ir c_2 apibrėžiami formulėmis (14)–(16).

2 Išvados

Ištirtas prekių kainos augimo dinaminio modelio, aprašyto diferencialine lygtimi su vėlavimu, priklausančiu nuo ieškomo sprendinio pusiausvyros būsenų, stabilumas. Remiantis bifurkacijų teorija sukonstruotas stabilus periodinis sprendinys.

Literatūra

[1] R. Barzdžiukas, R. Eitkevičiūtė ir O. Švitra. Nuo prekių kainos priklausantis vėlavimas kaleckio modelyje. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **53**:46–50, 2012.

[2] J.S. Kolesov ir D.I. Švitra. *Auto svyravimai sistemose su vėlavimu.* Mokslas, Vilnius, 1979 (rusų k.).

[3] D. Švitra. *Fiziologinių sistemų dinamika.* Mokslas, Vilnius, 1989 (rusų k.).

[4] D. Švitra. Vėlavimas ir ekonominių sistemų dinamika. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **53**:108–111, 2012.

[5] J. Timbergen. Statistical evidence on the ecceleration principle. *J. Econ., N. S.*, **18**(5):164–176, 1938.

SUMMARY

R. Barzdžiukas, O. Švitra, R. Vilkytė

Dynamic model of the commodity prices with variable delay

In this article the authors analyses of the commodity prices growth model with delay depends on the search solution, i.e. the commodity prices. The stable periodic solution of the model is constructed with the help of the Bifurcation theory.

Keywords: price of the commodity, dynamic model, differential equations, delay.