LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 111–116
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

2013 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Eglė Jakaitytė[1], **Algirdas Kaučikas**[2,3], **Edmundas Mazėtis**[3]

[1] *Nacionalinė M.K. Čiurlionio menų mokykla*
T. Kosciuškos g. 11, LT-01100, Vilnius
[2] *Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303, Vilnius
[3] *Lietuvos edukologijos universitetas, Matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT- 08106, Vilnius
E. paštas: egle.jakaityte@gmail.com, algirdas.kaucikas@mruni.lt
E. paštas: edmundas.mazetis@leu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariami 2013 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

1 Įvadas

2013 m. kovo 9 d. vyko XXII LEU jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė docentai A. Kaučikas ir E. Mazėtis. Straipsnyje pateikiamos uždavinių sąlygos ir sprendimai ta forma, kaip ir ankstesniuose autorių darbuose [1, 2, 3].

Olimpiadoje dalyvavo apie 90 vyresniųjų klasių moksleivių. Tarp dalyvių buvo moksleivių, jau pasižymėjusių ne tik Lietuvos, bet ir tarptautinėse olimpiadose. Dešimt dalyvių (po 2–3 iš kiekvienos klasės) buvo pakviesti į Lietuvos mokinių matematikos olimpiadą.

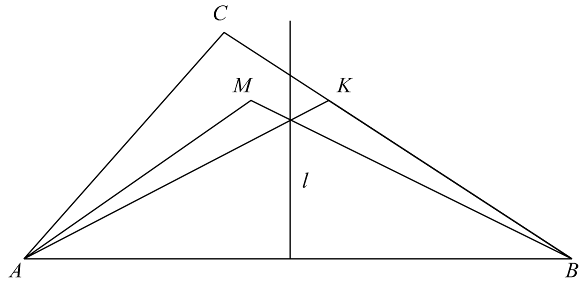
2 IX klasė

1. *Raskite bent vieną skaičių, kurio paskutinysis skaitmuo yra 2 ir, perkėlus šį skaitmenį į priekį, gaunamas dvigubai didesnis skaičius. Kiek tokių skaičių yra?*

Tegul tai skaičius $X = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 2}$. Tada paga sąlygą $2X = \overline{2 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$. Iš kitos pusės, jei skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra 2, tai padauginus šį skaičių iš 2 gaunamas skaičius, kurio paskutinysis skaitmuo yra 4. Taigi $a_{n-1} = 4$. Tęsiame dvigubinimą kol gauname skaitmenį 2, kuriuo prasideda skaičius $2 \cdot X$. Gauname 18 ženklų turintį skaičių $X = 105\,263\,157\,894\,736\,842$. Daugybą iš 2 galima tęsti toliau ir gauti uždavinio sąlygą tenkinantį skaičių $10^{18} \cdot X + X$. Taigi periodiškai rašant skaičiaus X skaitmenis, gaunama be galo daug skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $105\,263\,157\,894\,736\,842$.

2. *Lentoje po vieną kartą surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2013. Prieš kiekvieną iš jų parašome laisvai pasirinktą ženklą $+$ arba $-$. Kokį mažiausią skaičių galima gauti atlikus veiksmus?*



1 pav.

Tarp lentoje užrašytų skaičių yra 1007 nelyginiai skaičiai. Vadinasi, nepriklausomai nuo ženklų $+$ ir $-$ sudėliojimo, atlikus veiksmus visada gaunamas nelyginis skaičius S. Nurodysime būdą, leidžiantį gauti mažiausią nelyginį natūralųjį skaičių $S = 1$. Kadangi $2013 = 4 \cdot 253 + 1$, visus skaičius, pradedant 2, sugrupuojame į ketvertus, sudarytus iš paeiliui einančių skaičių k, $k+1$, $k+2$, $k+3$. Kadangi $k - (k+1) - (k+2) + (k+3) = 0$, tai $S = 1$.

Atsakymas: $S = 1$.

3. *Krepšinio turnyre dalyvavo keletas vyresniųjų klasių komandų ir dvigubai daugiau jaunesniųjų klasių komandų. Visoms komandoms tarpusavyje sužaidus po kartą paaiškėjo, kad jaunesniųjų klasių komandos kartu iškovojo ketvirtadaliu mažiau pergalių negu visos vyresniųjų klasių komandos. Kiek komandų dalyvavo tokiame turnyre, jei visos rungtynės baigėsi vienos iš komandų pergale?*

Vyresniųjų klasių komandų skaičių pažymėkime n. Tada jaunesniųjų klasių komandų skaičius yra $2n$. Pergalių skaičius tarpusavyje sužaidus vyresniųjų klasių komandoms lygus $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, o tarpusavyje sužaidus jaunesniųjų klasių komandoms $C_{2n}^2 = n(2n-1)$. Tarp jaunesniųjų ir vyresniųjų klasių įvyko $n \cdot 2n = 2n^2$ rungtynių. Tegul vyresnieji jose iškovojo x pergalių. Tada pagal sąlygą iškovotų pergalių snatykis yra $\frac{n^2-2+2x}{2(4n^2-n-2)} = \frac{4}{3}$. Iš čia $x = \frac{29n^2-5n}{14}$. Kadangi $x \leqslant 2n^2$, gauname, kad $n \leqslant 5$. Patikrinę gauname, kad x yra sveikasis skaičius tik kai $n = 5$. Taigi turnyre dalyvavo 5 vyresniųjų ir 10 jaunesniųjų klasių komandų.

Atsakymas: 15.

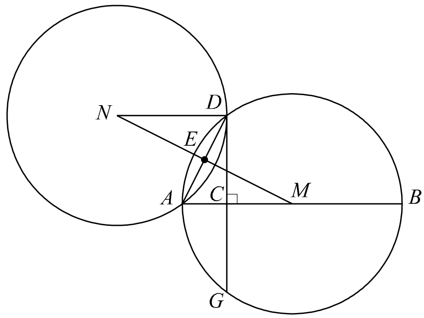
4. *Trikampio ABC viduje yra toks taškas M, kad $\angle BAM = \angle ABC$, $\angle AMB = 110°$. Kuri atkarpa BM ar AC ilgesnė, jei $\angle ACB = 80°$?*

Sakykime, kad tiesė l yra atkarpos AB vidurio statmuo, o taškas K yra simetriškas taškui M tiesės l atžvilgiu (žr. 1 pav.). Kadangi $\angle BAM = \angle ABC$, tai taškas K yra kraštinėje BC. Tuomet $\angle AKC = 180° - \angle AKB = 180° - \angle AMB = 70° < \angle ACK$, tai $AC < AK$. Taigi $AC < BM$.

Atsakymas: ilgesnė atkarpa BM.

3 X klasė

1. *Krepšinio turnyre dalyvavo keletas vyresniųjų klasių komandų ir dvigubai daugiau jaunesniųjų klasių komandų. Visoms komandoms tarpusavyje sužaidus po kartą paaiškėjo, kad jaunesniųjų klasių komandos kartu iškovojo ketvirtadaliu mažiau pergalių*



2 pav.

negu visos vyresniųjų klasių komandos. Kiek komandų dalyvavo tokiame turnyre, jei visos rungtynės baigėsi vienos iš komandų pergale?

Žr. IX klasės 3 uždavinį.

2. *Teigiamųjų skaičių sekos $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ pirmųjų n narių suma žymima S_n. Su bet kuriuo natūraliuoju n teisinga lygybė $\frac{x_n+2}{2} = \sqrt{2S_n}$. Užrašykite šios sekos bendrojo nario formulę.*

Pakėlę sąlygoje duotąją lygybę kvadratu, gauname $\frac{(x_n+2)^2}{4} = 2S_n$. Kadangi ši lygybė teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n, tai teisinga ir lygybė $\frac{(x_{n-1}+2)^2}{4} = 2S_{n-1}$. Atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname $(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1} + 4) = 8x_n$ arba $(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1}) = 4(x_n + x_{n-1})$. Iš čia $x_n - x_{n-1} = 4$. Taigi seka yra aritmetinė progresija, kurios skirtumas lygus 4. Kadangi $S_1 = x_1$, tai $\frac{x_1+2}{2} = \sqrt{2x_1}$. Iš čia $x_1 = 2$.

Atsakymas: $x_n = 4n - 2$.

3. *Su kuriais sveikaisiais n skaičius $n^5 - n$ dalijasi iš 240?*

Išskaidome: $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $X_n = n^5 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2+1)$. Kadangi $n-1, n, n+1$ yra vienas po kito einantys skaičiai, tai X_n dalijasi iš 3. Taip pat nesunkiai įsitikiname, kad su visais sveikaisiais n skaičius X_n dalijasi iš 5. Jei n yra nelyginis skaičius, tai $n-1$ ir $n+1$ yra gretimi lyginiai skaičiai; vienas iš jų dalijasi iš 4. Todėl sandauga $(n-1)(n+1)$ dalijasi iš 8. Taigi su visais nelyginiais n skaičius X_n dalijasi iš 240. Jei n lyginis skaičius, tai $X_n = n(n^4-1)$. Kadangi $n^4 - 1$ nelyginis skaičius, tai $n = 16k$, $k \in Z$.

Atsakymas: su visais nelyginiais n ir su $n = 16k$, $k \in Z$.

4. *Atkarpa AB yra apskritimo ω_1 skersmuo, atkarpa DG – jam statmena apskritimo styga. Kitas apskritimas ω_2 liečia tiesę DG taške D ir eina per tašką A. Raskite šių dviejų apskritimų spindulių santykį.*

Sakykime, kad tiesės AB ir DG kertasi taške C (žr. 2 pav.). Jeigu taškas M – apskritimo ω_1 centras, o taškas N – apskritimo ω_2 centras, tai $AB \| ND$. Jei taškas E yra atkarpos AD vidurys, tai $\angle MAE = \angle NDE$, $\angle AEM = \angle DEN = 90°$, todėl $\Delta MEA = \Delta NED$. Taigi apskritimų spinduliai AD ir AN yra lygūs.

Atsakymas: 1.

4 XI klasė

1. *Teigiamųjų skaičių sekos $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ pirmųjų n narių suma žymima S_n. Su bet kuriuo natūraliuoju n teisinga lygybė $\frac{x_n+2}{2} = \sqrt{2S_n}$. Užrašykite šios sekos bendrojo nario formulę.*

Žr. X klasės 2 uždavinį.

2. *Išspręskite lygčių sistemą*

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{15}{z} = 10 - zx, \\ \dfrac{15}{y} - \dfrac{10}{x} = 6 - xy, \\ \dfrac{10}{z} - \dfrac{6}{y} = 15 - yz. \end{cases}$$

Sistemos lygtis padauginę atitinkamai iš zx, xy, yz ir sudėję, gauname lygybę

$$6xy + 15yz + 10zx - (xy)^2 - (yz)^2 - (zx)^2 = 0. \tag{1}$$

Lygtis padauginę atitinkamai iš 10, 6, 15 ir sudėję, gauname lygybę

$$-6xy - 15yz - 10zx + 6^2 + 15^2 + 10^2 = 0. \tag{2}$$

Atėmę (1) lygybę iš (2), gauname:

$$(xy - 6)^2 + (yz - 15)^2 + (zx - 10)^2 = 0.$$

Iš čia $xy = 6$, $yz = 15$, $zx = 10$. Sudauginę šias tris lygybes gauname, kad $(xyz)^2 = 30^2$. Kai $xyz = 30$, gauname sprendinį $(2; 3; 5)$; kai $xyz = -30$, gauname sprendinį $(-2; -3; -5)$.

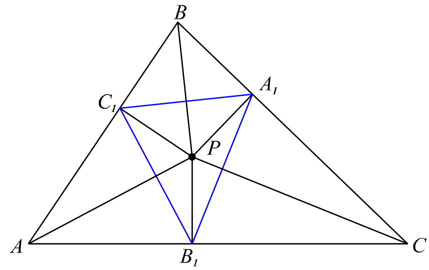
Atsakymas: $(2; 3; 5)$, $(-2; -3; -5)$.

3. *Sakykime, kad pora $(a; b)$ yra sveikasis lygties $2x^2 + x = 3y^2 + y$ sprendinys. Įrodykite, kad $a - b$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas ir raskite vieną natūralųjį lygties sprendinį.*

Pažymėkime $m = a - b$, $m \in Z$. Įrašę $a = b + m$ į lygtį, gauname, kad $b^2 - 4mb - (2m^2 + m) = 0$. Iš čia $b_{1,2} = 2m \pm \sqrt{6m^2 + m}$. Kadangi b ir m yra sveikieji skaičiai, tai $6m^2 + m = n^2$, $n \in Z$. Tegul $n \geqslant 0$. Kai $n = 0$, tai uždavinio teiginys teisingas. Su $n = 1$ lygtis sveikųjų sprendinių neturi, todėl $n \geqslant 2$. Tada $m(6m + 1) = n^2$. Kadangi sveikieji skaičiai m ir $6m + 1$ yra tarpusavyje pirminiai, tai $m = k^2$ arba $m = -k^2$, $k \in N$, o $6m + 1 = l^2$ arba $6m + 1 = -l^2$, $l \in N$. Jei $m = -k^2$, gauname, kad $-6k^2 + 1 = -l^2$. Iš čia $l^2 = 6k^2 - 1$. Tuomet skaičių l^2 dalijant iš 3, gauname liekaną 2; bet taip būti negali. Taigi $a - b = k^2$. Kai $k = 2$, gauname lygties natūralųjį sprendinį $(22; 18)$.

Atsakymas: $(22; 18)$.

4. *Smailiojo trikampio ABC viduje yra toks taškas P, kad $\angle APB = \angle C + 60^\circ$ ir $\angle BPC = \angle A + 60^\circ$. Iš taško P į trikampio ktaštines nuleisti statmenys PA_1, PB_1, PC_1. Raskite trikampio $A_1B_1C_1$ kampus.*



3 pav.

Akivaizdu, kad taškai A, B_1, P, C_1 (žr. 3 pav.) priklauso vienam apskritimui, todėl $\angle PAB_1 = \angle PC_1B_1 = \alpha_1$. Analogiškai taškai A_1, P, C_1, B priklauso vienam apskritimui, todėl $\angle PC_1A_1 = \angle PBA_1 = \beta_1$. Taigi $\angle A_1B_1C_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha - \alpha_2 + \beta - \beta_2$; čia $\alpha = \angle A = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \angle B = \beta_1 + \beta_2$. Tuomet $\angle A_1C_1B_1 = 180° - \angle C - (180° - \angle APB) = \angle APB - \angle C = 60°$. Visiškai analogiškai gauname, kad $\angle C_1A_1B_1 = 60°$.

Atsakymas: 60°.

5 XII klasė

1. *Išspręskite lygčių sistemą*

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{15}{z} = 10 - zx, \\ \dfrac{15}{y} - \dfrac{10}{x} = 6 - xy, \\ \dfrac{10}{z} - \dfrac{6}{y} = 15 - yz. \end{cases}$$

Žr. XI klasės 2 uždavinį.

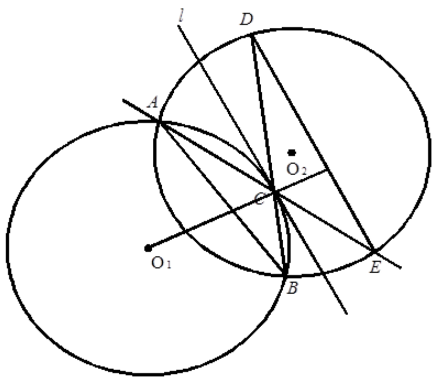
2. *Sakykime, kad pora $(a;b)$ yra sveikasis lygties $2x^2 + x = 3y^2 + y$ sprendinys. Įrodykite, kad $a - b$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas ir raskite vieną natūralųjį lygties sprendinį.*

Žr. XI klasės 3 uždavinį.

3. *Įrodykite, kad su visais teigiamaisiais skaičiais x, y, z, tenkinančiais sąlygą $xyz = 1$, yra teisinga nelygybė* $\frac{1}{1+x^3+y^3} + \frac{1}{1+y^3+z^3} + \frac{1}{1+z^3+x^3} \leqslant 1$.

Iš nelygybės $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy$ ir lygybės $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ gauname, kad $x^3 + y^3 \geqslant (x+y)xy > 0$, kai x ir y – teigiami skaičiai. Iš čia $\frac{1}{1+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{1+xy(x+y)} = \frac{z}{z+x+y}$. Analogiškai gauname nelygybes $\frac{1}{1+y^3+z^3} \leqslant \frac{x}{x+y+z}$ ir $\frac{1}{1+z^3+x^3} \leqslant \frac{y}{y+z+x}$, kurias sudėję gauname nelygybę, kurią ir reikėjo įrodyti.

4. *Apskritimai S_1 su centru O_1 ir S_2 su centru O_2 susikerta taškuose A ir B. Apskritimo S_1 lanke, esančiame apskritimo S_2 viduje, pažymėtas taškas C. Tiesės*



4 pav.

AC ir BC apskritimą S_2 *kerta taškuose E ir D. Raskite kampą tarp tiesių DE ir* O_1C.

Sakykime, kad tiesė l yra apskritimo S_1 liestinė taške C (žr. 4 pav.). Kampas tarp tiesių l ir AE yra lygus kampui ABC. Kadangi $\angle ABC = \angle AED$, tai $l \| DE$. Todėl $O_1 \perp DE$.

Atsakymas: 90°.

Literatūra

[1] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mažėtis. 2010 metų VPU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **51**:97–102, 2010.

[2] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mažėtis. 2011 metų VPU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**:83–88, 2011.

[3] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mažėtis. 2012 metų LEU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. mat. rink. LMD darbai, ser. B*, **53**:169–174, 2011.

SUMMARY

Survey of LEU olympiad 2013 for young mathematicians
E. Jakaitytė, A. Kaučikas, E. Mažėtis

The texts and solutions of the LEU young mathematicians olympiad - 2013 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.