Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 117–122
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

5–8 klasių mokinių problemų sprendimų gebėjimų ugdymas „Kengūros“ vasaros stovykloje

Romualdas Kašuba[1], **Regina Rudalevičienė**[2]

[1] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
[2] *VšĮ Vilniaus „Versmės“ katalikiškoji gimnazija*
Architektų g. 85, LT-04208 Vilnius
E. paštas: romualdas.kasuba@mif.vu.lt, rudaleviciene.regina@gmail.com

Santrauka. Šiame straipsnyje nagrinėjami ir aptariami kai kurie uždavinių sprendimo vasaros stovyklose galimybės ir ypatumai.

Raktiniai žodžiai: uždavinių siūlymo specifika, skaitinė konkretybė ir natūralių uždavinių prieinamumas, sprendimo strategija ir platesnis kontekstas.

Yra sakoma, kad gerą uždavinį galima spręsti bet kur, net ir besimaudant ežere ar važiuojant troleibusu. Gal tai tikrai taip, dėl to mes tikrai nesiginčysime ir tuo net nepradėsime abejoti. Tačiau mes tikrai manome, kad ne kiekvienas uždavinys vienodai gerai tinka spręsti – net ir vasarą susirinkus spręsti uždavinių su gabiais vaikais, kur jau rodytųsi, kad galima imti bet kurį, kad ir sunkesnį uždavinį. Tinka patrauklus uždavinys, nesvarbu informatikinis, ar matematinis (plg. [1]), kuriame truputį pagalvojęs jau žinai, nuo ko pradėti, po to, jau truputį ką nors padaręs, vėl matai, kaip elgtis, kad realizuotum, ką sumanęs, ir realizuodamas tai vėl pamatai, ką daryti toliau. Kalbant vasaros stovyklos terminologija, truputį pasikaitini, truputį pasimaudai, ir ne tik vasaros poilsis, bet ir realūs darbai jau yra tikrai pradėti. Ieškant solidesnių strateginių pavadinimų tam, ką mes dabar stengėmės vaizdžiai, tačiau realistiškai apibūdinti, gal tiktų kažkada buvęs labai madingas posakis „žingsnis po žingsnio“ (panašus į kažkada nepaliaujamai linksniuotą vadinamąjį „step by step“).

Uždavinių siūlymo specifika

Savaime suprantama, kad vasaros stovykloje uždaviniai ir kiti veiklos pasiūlymai turėtų būti pateikiami šiek tiek išradingai, nelyginant koks sujudinimas galimam vasaros snauduliui įveikti. Apskritai dirbant su vaikais, lygiai kaip su kitais potencialiai nuovokiais asmenimis, labai praverčia didysis menas ar bent aiškiau išreikštas stengimasis išlikti šiek tiek žaismingam, nenustojant būti rimtam. Tikrasis žaismingumas yra labai didelis menas, todėl vaikai taip nepaliaujamai ir mėgsta žaisti. Žaidimas juk ir yra tas tikrovės modeliavimas, be kurio, kaip tikime, dar nėra „kaip reikiant“ užaugęs joks vaikas. Kaip sakėme, natūraliai išlikti žaismingam yra tikrai nelengva, bet stengiantis net ir sudėtingesni reikalai dažniausiai visai gerai nusiseka. Svarbiausia yra to visai nepamiršti ir, tai prisimenant, kartas nuo karto skirti tam kažkiek konkretaus „apčiuopiamo“ dėmesio.

Skaitinė konkretybė ir uždavinių prieinamumas

Paimkime lentelę 4×3 ir pamėginkime jos pakraščiais surašyti pirmą nenulinę skaičių dešimtinę 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10.

1	2	3	4
10	X	X	5
9	8	7	6

Dabar skaičiai yra surašyti „aplink stačiakampį“ ir gal todėl visos keturios natūraliai „išdygstančios“ sumos, kurios yra $1 + 2 + 3 + 4$ („viršus“), $4 + 5 + 6$ („dešinė“), $6 + 7 + 8 + 9$ („apačia“) bei $9 + 10 + 1$ („kairė“), arba atitinkamai 10, 15, 30 ir 20, yra nelygios. O mes jau staiga norėtume, kad jos, tos visos nelygios sumos „palygėtų“, kad jos „išsilygintų“ arba sutaptų – taip, taip, sutaptų, arba kad jos visos 4 būtų lygios. Tada, suprantama, turėtume įrašinėti kitaip. Kyla pirmasis amžinas klausimas: jei tikslas jau (beveik) suvoktas, tai nuo ko gi čia ir dabar mes galėtume pradėti ir koks čia būtų pats pirmasis efektyvus žingsnis?

Dabar, pasakę, kad pirmoji skaičių dešimtinė 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 yra kažkuria eile surašyta stačiakampiu, mes, pakeliui duodami kiekvienam iš skaičių dešimt vardų $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$, jau turėtume lentelę su viltimi surašyti į ją tuos skaičius taip, kad sumos viršuje, apačioje, kairėje ir dešinėje būtų lygios, arba jau matome lentelę su prašymu, kad būtų teisingos lygybės

A	B	C	D
J	**X**	**X**	E
I	H	G	F

$A + B + C + D = D + E + F = F + G + H + I = I + J + A$. Dabar konkrečiai klausti būtų galima taip: jei jau siekiame, kad tos visos keturios sumos būtų lygios, tai pažymėjus tą skaičių, kuriam jos yra ar gali būti lygios, raide T, jau galima „konkrečiai“ klausti, o kam gali būti lygus toks T? Prieš tai, pratinant moksleivį apie tokį skaičių daugiau pagalvoti ar daugiau jo paieškoti, galima ir labai pravartu yra klausti kokio nors tokio T „konkretaus“ pavyzdžio, kas šiuo atveju reiškia, kad mes prašome kokio nors konkretaus surašymo, pavyzdžiui, kad ir tokio:

10	1	5	6
4	X	X	7
8	2	3	9

Šiuo atveju mes matome, kad viena iš galimų T reikšmių yra $10 + 1 + 5 + 6 = 6 + 7 + 9 = 9 + 3 + 2 + 8 = 8 + 4 + 10 = 22$. O kokios dar kitos galimos T reikšmės? Juk filosofuojant dar be formulių apie tai, koks tas T galėtų būti, mes gerai suvokiame, nes į lentelę jau spėjome ne kartą pasižiūrėti, kad bet koks, net ir tas pats mažiausias T yra keturių skirtingų skaičių suma, todėl jis tikrai nėra mažesnis už keturių pačių mažiausių skaičių sumą $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Todėl jau vien iš euristinių arba filosofinių pasamprotavimų, arba, kitaip, iš sveiko proto argumentų, mes matome, kad T yra bent 10. Iš kitos pusės, kad ir koks nemenkas T sugebėtų būti, jis visada turės būti užrašomas ir trijų dėmenų suma – ir net dviem būdais. Todėl būdamas užrašomas bent dviem būdais jis tikrai jau vien dėl to užrašymo, kad ir vieninteliu būdu, jau negalės „prašokti“ trijų pačių didžiausių leistinų skaičių sumos $10+9+8=27$. Tačiau jau laikas imtis formulių ir prisiminti mūsų pagrindinį norą ir reikalavimą:

$$T=A+B+C+D=D+E+F=F+G+H+I=I+J+A=T.$$

Žiūrėdami į lygybes, kuriose pirmosios 10 raidžių ženklina 10 pirmųjų skaičių nuo 1 iki 10, mokiniai tuojau gali pasiūlyti visas tas lygybes sudėti, nes tada tie visi 10 pirmųjų skaičių atsidurtų vienoje lygybės pusėje ir vietoje 10 nežinomų dydžių galėtume įrašyti vieną gerai žinomą jų sumą, lygią 55, ir turėtume tokią mūsų išrutuliotų reikalų padėtį: $4T=A+B+C+D+D+E+F+F+G+H+I+I+J+A=55+A+D+F+I$, arba, trumpiau $4T=55+A+D+F+I$, kur A, D, F ir I yra vadinamieji „dvigubo pavaldumo“, arba „kryžkelėse“ atsidūrę skaičiai.

Taigi, $65\leqslant 4T\leqslant 89$ ir $16{,}25\leqslant T\leqslant 22{,}25$. Kadangi T yra sveikasis skaičius, tai T galimos reikšmės yra 17, 18, 19, 20, 21, 22. Kadangi stovyklos auditorijoje būna pakankamai žmonių, tai dabar galima juos nedelsiant skirstyti grupelėmis ir prašyti realizuoti tas gautąsias reikšmes lentelėje, arba registruoti gaunamas galimas T, vis pasidomint, kodėl kažkodėl ne visos jos pasirodo. Realizavusio lentelėje duotąją reikšmę vardą labai efektyvu būna įrašyti į patį jo surastosios lentelės vidurį, ten, kur mes iki šiol rašėme X-us. Su pačia didžiausia galima T reikšme 22 lentelę mes jau turime, nesunku rasti ir su reikšmėmis 18, 19, 20:

4	1	7	6
9	X	X	10
5	3	8	2

8	2	6	3
10	X	X	7
1	4	5	9

10	1	5	4
8	X	X	7
2	3	6	9

Tik kažkodėl nepasirodo reikšmės 17 ir 21. Ir jeigu reikšmės 17 nepasirodymas nėra toks nerimastingas ir bauginantis, na, pačios didžiausios ir mažiausios reikšmės dažnai nukenčia dėl kokių nors ekstremalių negalimybių, tai reikšmės 21 „nepasirodymas“ jau yra visiškai nesuvokiamas, tai yra jau mistinis, na, jau tikrai intriguojantis. Po šitokio klausimo ir lengvų negalimybių reikia visiems sėsti ir pasvarstyti amžiną klausimą: ar aš to padaryti negaliu tik „laikinai“, ar gal to padaryti apskritai neįmanoma?

Labai pravartūs yra tokie uždaviniai, kuriuose naudojamos artimos visiems suprantamos realijos, o ypač daugeliui žinomi vardai. Tai yra žinoma, bet vis tiek neretai pamirštama. Tai galėtume pavadinti „prakartėlės efektu“: visi ją yra abstrakčiai matę, visi atsimena, ką ten matė, bet išvydę ją dar sykį, vis tiek neišvengiamai pamato ką nors naujo.

Apie vieną nepersunkų turnyrą

„Kengūros“ stovyklos šachmatų vieno rato turnyre, kur kiekvienas dalyvis sužaidžia po vieną partiją su visais likusiais turnyro dalyviais, dalyvavo du bičiuliai ir keletas kadetų. Šachmatų turnyre, kaip žinoma, už pergalę dabar jau yra skiriami 2 taškai, už lygiosiomis sužaistą partiją kiekvienam yra skiriama po 1 tašką, o už pralaimėtą partiją žaidėjas gauna 0 taškų. Suvedus rezultatus paaiškėjo, kad abu bičiuliai kartu surinko 13 taškų, o visi turnyre dalyvavę kadetai – absoliučiai po tiek pat taškų kiekvienas. Kiek kadetų dalyvavo Kengūros stovyklos šachmatų turnyre?

Mintis, ankstesnė už visas kitas, galėtų būti tokia, kad visus abiejų bičiulių taškus mes galime suskirstyti į dvi rūšis – jų tarpusavio partijos taškai, kurių yra 2, ir kiti taškai, pelnyti iš partijų su kitais, kurių tada yra 11. Darome apskaitą: n kadetų, 2 bičiuliai, vadinasi, iš viso $(n+2)$ dalyvių, be to, visi kadetai surinko po vienodai, taigi po m taškų, iš viso sužaista $((n+2)(n+1))/2$ partijų, „išžaista“ $(n+2)(n+1)$ taškų ir todėl yra teisinga lygybė $13+nm = (n+1)(n+2)$, iš kurios $nm = n^2+3n-11$ ir $m = n+3-11/n$, ir vienintelė galima n reikšmė paaiškėja esanti 11. Iš karto padarykime vieną pastabą, į kurią visada ir visur atkreipiame dėmesį: gal ne absoliučiai kiekvienu atveju būtina, bet visada yra gerai kalbant apie turnyrą ir gavus, kad kas nors yra įmanoma, sudaryti lentelę. Nes atsakymas gali atrodyti labai gražus ir teisingas, bet lentelė gali „nesusidaryti“.

Uždavinys kur, rodytųsi, gali ką bepanorėjęs

Kita galinga strategija, apie kurią mokykloje veikiausiai nespėjama pakalbėti, o „Kengūros“ stovykloje vidurvasaryje vis tiek turi pakakti laiko užsiminti, yra didelių skaičių keitimas mažesniais. Tai labai efektyvi konstruktyvistinė strategija. Pradėkime nuo tokio rimto uždavinio, nors ir labai paprastai atrodančio:

Lentoje surašyti visi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 64. Pradedantysis žaidėjas A pasirenka vieną iš jų ir įrašo į bet kurį lentelės 8×8 langelį. Tada žaidėjas B vieną iš likusių skaičių įrašo į bet kurį laisvą lentelės langelį. Taip pakaitomis jie užpildo visą lentelę. Dabar kiekviename stulpelyje išrenkamas mažiausias skaičius ir apskaičiuojama visų tų 8 skaičių suma S.

(a) Nurodykite, kaip turi žaisti žaidėjas B, kad skaičius S būtų lyginis, nors ir kaip žaistų jo priešininkas.

(b) Nurodykite, kaip turi žaisti žaidėjas B, kad skaičius S būtų nelyginis, nors ir kaip žaistų jo priešininkas.

Pagalvokime, kaip galėtume sumažinti lentelės matmenis, tikėdamiesi, kad tada antrojo žaidėjo B strategija pasidarytų labiau įžiūrima – nes dabar, po pirmojo sąlygos perskaitymo, gali pasirodyti, kad antrasis žaidėjas gali labai daug – nori padaro, kad suma būtų lyginė, nori – kad nelyginė. Kartais atrodo, kad pavadinti tai, ką mes darome, didelio meno nėra, o jeigu ir yra, tai čia tik toks žodinis, labiau pavadinimų menas, arba, kaip burbtelėjęs žmogus pavadintų – etikečių klijavimas – anokia čia naujiena. Taip pat ir strategijos priskyrimas tam, ką mes darome, vargdami su uždaviniu, irgi neatrodo, kad čia būtų kažkas tokio „galingai gero“. Tačiau uždavinio priskyrimas kokiai nors strategijai iš karto įjungia tą uždavinį nelyginant į kokią didelę bendruomenę, o įjungimas į didelį kolektyvą nelyginant palengvina pritaikyti jau viso kolektyvo turimą patirtį, kuri yra didžiulė arba kaip nors kitaip labai naudinga. Štai dirstelėkime į dar vieną tokį lengvai žaidybinį uždavinį, kurį dar ir pasistengsime lengvai nutrūktgalviškai suformuluoti – „Kengūros“ vasaros stovyklų patirtis rodo, kad tokias formuluotes vasariniai aritmetiniai entuziastai mėgsta.

Pas Tadą skaičius skaičių veja

Tadas pasičiupo skaičių 1 ir ėmė iš jo „vyti“ skaičių virtinę. Kad nebūtų labai nuobodu, jis pakaitomis taiko du aritmetinius veiksmus: pirmiau prideda 5, po to atima 2 ir toliau vėl daro tą patį: vėl prideda 5, vėl atima 2 ir taip jis juda toliau „vydamas" skaičių virtinę 1, 6, 4, 9, 7, 12, 10, 15, 13, 18, 16, 21, 19, 24, 22, 27, 25, 30, 28, 33, 31, 36, 34, 39, 37, 42 ... Dabar klausimas yra toks: ko gi mes norėsime, parašę gana gausiai tų virtinės narių? Mes klausime: ar pasirodys toje virtinėje keli vienaskaitmeniai skaičiai, tokie kaip 3333, 4444, 5555, 6666, 7777?

Strategijos paminėjimas kaip ženklus nusisekusio uždavinio sprendimo resursas

Skaitytojui – ypač įdėmesniam – mūsų veiksmai gali nepatikti ir jis, atvirai kalbėdamas, tikriausiai mums pasakytų maždaug štai ką: kiek mes žinome uždavinių sąlygas, niekada tiek daug sekos narių nėra apskritai išrašinėjama. Juo labiau, kad čia tėra tik du paprasti aritmetikos veiksmai – vienas „pridėk 5", o kitas – „atimk 2". Visa tai tikrai taip, visa tai tiesa, bet juk pats pirmasis uždavinių sprendimo principas, atsiprašome, pati pirmoji strategija, kuri yra tiek natūrali, kad net strategija nelaikoma, yra juk „pajudink mažąjį pirštelį", arba, dar gyvenimiškiau kalbant, „daryk, ką sugalvoji". Ir dabar tas pats. Išrašydami skaičių daugiau negu tokiais atvejais įprasta, mes dar nežinome, kuo praturtėjome, bet kažkaip tai mums tuojau pasidarys aiškiau. Jeigu mes dar kartą pasižiūrėtume į uždavinio klausimo pirmąjį skaičių 3333, tai pirmiausia pastebėtume, kad jis dalus iš 3. O mūsų sekoje, ar yra skaičių, kurie dalintųsi iš 3? Pasižiūrėję matome, kad yra, daug tokių skaičių pas mus yra, pats pirmasis toks skaičius yra antrasis sekos narys 6, toliau dar ir ketvirtasis, ir dar toliau šeštasis, aha, matome, kad kas antras mūsų sekos narys dalijasi iš 3. Bet tai dar labai negarantuoja, kad gausime 3333, kaip mūsų sekos narį. Ir čia labai gera yra dar kita gyvenimiška strategija: to, kuo tuo metu uždavinio sprendimui nereikia, nematyk. Šios strategijos pavadinimas yra „palik tik tai, ko tau reikia, ir pasižiūrėk, ar iš to daug išeis". Kad ir kaip vaikiškai beatrodytų, tai labai galinga strategija. Jeigu mes paliktume tik sekos narius su poriniais numeriais, tai būtų virtinė 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ... – na, ar mes jau nesame pastebėję, kad tie „kas antrieji" nariai tikrai paauga visada po 3 todėl ir palaipsniui bus gauti absoliučiai visi iš 3 besidalijantys ir už pačius 3 didesni skaičiai, taigi, ir skaičiai 3333 ir 6666. Tai labiau „pasimato" išbraukus skaičius 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., kurie ir patys tvarkingai paauga po 3, tik kad patys iš 3 nesidalija. Bet kadangi pats pirmasis iš jų yra 1, tai ir kiti, dalijami iš 3, duos liekaną 1. Bet iš tų keturženklių pretendentų į tolimus sekos narius irgi yra skaičių, kurie irgi duoda liekaną 1 dalijami iš 3. Tai skaičiai 4444 ir 7777. Vadinasi, ir jie taip pat pasitaikys toje skaičių virtinėje. Pagal „Kengūros" papročius, jei keturi siūlomi kandidatai virtinėje pasirodys, tai tas penktasis 5555 toje virtinėje nepasirodys. Jis tikrai nepasirodys, nes mūsų sekos nariai iš eilės arba dalijasi iš 3, arba turi liekaną 1. Kitokių skaičių ten nėra, nebus toje sekoje ir 5555, turinčio kitokią dalybos iš 3 liekaną, sutampančią su $5+5+5+5$ liekana, kuri yra 2.

Kad ir kaip tai beatrodytų keistoka, bet, nors „Kengūros" konkurso dalyvių skaičius gerina visus įmanomus Gineso knygos masiškumo rekordus, straipsnių ir kitokios literatūros apie būtent tokių kengūrinių uždavinių sprendimą labai negausu [2]. Ne kiek tėra kalbėta ir apie galimus papildomus tokių uždavinių sprendimo resursus ir teorines ir praktines sukauptos medžiagos apibendrinimo galimybes vasaros stovyklose ar kitose galimose gausesnėse kengūrininkų susiėjimo vietose.

Literatūra

[1] V. Dagienė and R. Kašuba. “Kangoroo” and “Beaver” – the contests for all pupils to be more interested in mathematics and informatics. In *Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students: Proceedings of 6th International Conference*, pp. 56–61. University of Latvia, Riga, 2011.

[2] R. Kašuba, R. Rudalevičienė. Kelios paprastos pastabos apie „kengūros“ grožį ir naudą. *Liet. mat. rink., LMD darbai*, **52**:134–139, 2010.

SUMMARY

Developmentof problem solving abilities of grades 5–8 at Kangaroo summer camp

R. Kašuba, R. Rudalevičienė

In the presented article some problems especially suitable for useful solution on Kangaroo summer camps are presented and discussed.

Keywords: specific of the problem posing, concreteness and the natural accessibility of problems; strategy of problems solving as successful extension of problem context.