Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
55 t., 2014, 34–38

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

2014 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Eglė Jakaitytė[1], **Edmundas Mazėtis**[2,3]

[1] *Nacionalinė M.K. Čiurlionio menų mokykla*
T. Kosciuškos g. 11, LT-01100, Vilnius
[2] *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius
[3] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius
E. paštas: egle.jakaityte@gmail.com; edmundas.mazetis@leu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariami 2014 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

1 Įvadas

2014 m. kovo 15 d. vyko XXIII Lietuvos edukologijos universiteto jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė docentai A. Kaučikas (MRU) ir E. Mazėtis. Straipsnyje pateikiamos uždavinių sąlygos ir sprendimai ta forma, kaip ir ankstesniuose autorių darbuose [1, 2, 3].

Olimpiadoje dalyvavo apie 90 IX–XII klasių moksleivių. Tarp dalyvių buvo moksleivių, jau pasižymėjusių ne tik Lietuvos, bet ir tarptautinėse olimpiadose. Dešimt dalyvių (po 2–3 iš kiekvienos klasės) buvo pakviesti į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadą.

2 IX klasė

1. *Reksas ir Pifas čiupo už skirtingų dešros galų. Jei tik Reksas nukąstų savo gabalą, tai liktų* 300 *gramų dešros daugiau negu nukando Reksas. Jei tik Pifas nukąstų savo gabalą, tai liktų* 450 *gramų dešros daugiau negu nukando Pifas. Kiek gramų dešros liks, jei abu nukąs savo gabalus*?

Sakykime, kad x − Rekso nukąstos dešros masė, y − Pifo nukąstos dešros masė, o a − likusios dešros masė. Pagal uždavinio sąlygą teisingos tokios lygybės: $a + y = x + 300$, $a + x = y + 450$. Sudėję abi lygtis, gauname, kad $2a = 750$.

Atsakymas: 375 g.

2. *Dešimčiai moksleivių buvo pateikta* 10 *uždavinių. Kiekvienas moksleivis išsprendė skirtingą skaičių uždavinių. Kiekvieną iš pateiktų uždavinių išsprendė toks pats skaičius moksleivių. Žinoma, kad moksleivis Darius išsprendė penkis pirmuosius

uždavinius, bet neišsprendė šeštojo, septintojo, aštuntojo ir devintojo uždavinių. Ar Darius išsprendė dešimtąjį uždavinį?

Kiekvienas iš dešimties moksleivių išsprendė skirtingą kiekį uždavinių. Kadangi galimas toks atvejis, kai kuris nors moksleivis neišsprendė nė vieno uždavinio, tai yra 11 galimų variantų. Kadangi moksleivių buvo 10, tai kurio nors skaičiaus uždavinių neišsprendė nei vienas. Tarkime, kad nei vienas moksleivis neišsprendė x uždavinių, čia x – sveikasis neneigiamas skaičius, ne didesnis už 10. Taigi, iš viso buvo išspręsta $0 + 1 + 2 + \cdots + 10 - x = 55 - x$ uždavinių. Kadangi kiekvieną uždavinį išsprendė toks pats moksleivių skaičius, tai skaičius $55 - x$ dalijasi iš 10. Vienintelė šią sąlygą tenkinanti x reikšmė yra $x = 5$. Taigi, niekas neišsprendė 5 uždavinių, todėl Darius dešimtą uždavinį išsprendė.

Atsakymas: Darius dešimtą uždavinį išsprendė.

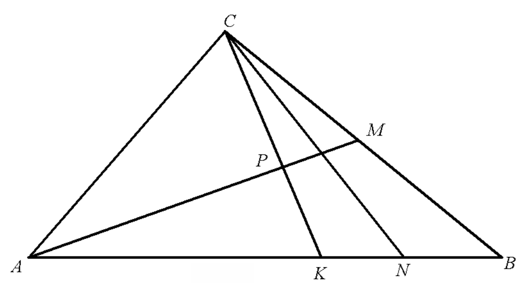
3. *Natūraliojo skaičiaus n skaitmenų suma dalijasi iš* 25*, o skaičiaus $n - 1$ skaitmenų suma taip pat dalijasi iš* 25.

a) *Raskite bent vieną tokį skaičių n.*
b) *Kiek yra tokių skaičių?*
c) *Raskite mažiausią tokį skaičių n.*

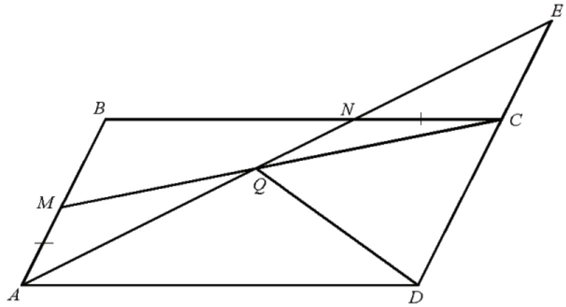
Jeigu skaičius n baigiasi ne 0, tai skaičiaus $n - 1$ skaitmenų suma yra vienetu mažesnė už skaičiaus n skaitmenų sumą. Taigi abiejų skaičių skaitmenų sumos negali dalintis iš 25. Analogiškai įsitikiname, kad ir priešpaskutinis skaitmuo turi būti lygus 0, ir t. t. Sakykime, kad skaičiaus n gale yra k nulių, t. y. $n = A\underbrace{00\ldots0}_{k}$. Tada $n - 1 = (A - 1)\underbrace{99\ldots9}_{k}$. Taigi, skaičiaus $n - 1$ skaitmenų suma lygi $N - 1 + 9k$, čia N yra skaičiaus A skaitmenų suma. Kadangi skaičiaus A skaitmenų suma dalijasi iš 25, tai $9k - 1$ turi dalytis iš 25. Taip yra, pvz., kai $k = 14$. Todėl uždavinio a) dalį tenkina bet kuris skaičius, pavidalo $A\underbrace{00\ldots0}_{1}$, jei tik skaičiaus A skaitmenų suma dalijasi iš 25. Tokių skaičių yra be galo daug. Mažiausias skaičius, kurio skaitmenų suma dalijasi iš 25, yra 799.

Atsakymas: a) pvz., 99700000000000000; b) be galo daug; c) 79900000000000000.

4. *Trikampio ABC kraštinė $AB = 8$. Kraštinėje AB yra taškas K toks, kad $AK = 6$. Atkarpa CK ir pusiaukraštinė AM kertasi taške P ir $PM = 1$. Raskite pusiaukraštinės AM ilgį.*



1 pav.



2 pav.

Nubrėžiame atkarpą $MN||CK$ (1 pav.). Kadangi taškas M yra atkarpos BC vidurio taškas, tai atkarpa MN – trikampio BKC vidurio linija, t. y. $KN = NB = 1$. Iš trikampių APK ir AMN panašumo išplaukia lygybė $AP : AK = AM : AN$, t. y. $AP : 6 = (AP + 1) : 7$. Iš čia seka, kad $AP = 6$, todėl $AM = 7$.

Atsakymas: 7.

3 X klasė

1. Žr. IX klasės 2 uždavinį.

2. *Teigiamieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybę $ab + bc + ca = 5abc$. Su kuriomis a, b ir c reikšmėmis suma $S = a + b + c$ yra mažiausia?*

Kadangi a, b ir c – teigiamieji skaičiai, tai sąlygoje duotąją lygybę užrašome taip: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 5$, todėl teisinga lygybė: $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{5}$. Pagal harmoninio ir aritmetinio vidurkių nelygybę, gauname, kad $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$. Iš gautųjų lygybių seka, kad $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{5}$. Harmoninio ir aritmetinio vidurkių nelygybėje lygybė galioja tik tuomet, kad visi skaičiai yra lygūs. Kai $a = b = c$ iš sąlygoje duotos lygybės gauname $3a^2 = 5a^3$, t. y. $a = b = c = 0{,}6$.

Atsakymas: $a = b = c = 0{,}6$.

3. Žr. IX klasės 3 uždavinį.

4. *Lygiagretainio $ABCD$ smailusis kampas A lygus α. Kraštinėse AB ir BC pažymėti taškai M ir N tokie, kad $AM = NC$. Atkarpos AN ir CM kertasi taške Q. Raskite kampą ADQ.*

Sakykime, kad tiesės AN ir DC kertasi taške E ir $AD = a$, $AB = b$, $AM = CN = n$ (2 pav.). Iš trikampių AED ir NEC panašumo turime $\frac{AD}{ED} = \frac{NC}{EC}$, t. y. $\frac{a}{EC+b} = \frac{n}{EC}$. Iš čia $EC = \frac{nb}{a-n}$, o $ED = \frac{ab}{a-n}$. Iš trikampių AMQ ir ECQ panašumo gauname $\frac{AQ}{EQ} = \frac{AM}{EC} = \frac{a-n}{b}$. Kita vertus $\frac{AD}{DE} = a : \frac{ab}{a-n} = \frac{a-n}{b}$. Kadangi $\frac{AQ}{QE} = \frac{AD}{DE}$, tai atkarpa DQ yra trikampio ADE pusiaukampinė. Taigi $\angle ADQ = \frac{180^0-\alpha}{2}$.

Atsakymas: $90° - \frac{\alpha}{2}$.

4 XI klasė

1. *Raskite visas pirminių skaičių p ir q poras, su kuriomis skaičius $7p+1$ dalijasi iš q ir skaičius $7q + 1$ dalijasi iš p.*

Akivaizdu, kad jeigu pora $(p;q)$ tenkina uždavinio sąlygą, tai ir pora $(q;p)$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą. Be to, jei $p=q$, tai skaičius $7p+1$ nesidalija iš pirminio skaičiaus p. Todėl sakykime, kad $p>q$. Pastebėkime, kad skaičius $7p+7q+1$ dalijasi iš p ($7q+1$ dalijasi iš p) ir iš q ($7p+1$ dalijasi iš q). Kadangi p ir q yra pirminiai skaičiai, tai skaičius $7p+7q+1$ dalijasi iš jų sandaugos pq, todėl $pq \leqslant 7p+7q+1$. Pertvarkę šią nelygybę gauname, kad $(p-7)(q-7) \leqslant 50$. Jei $q=2$, tai $7q+1=15$, todėl $p=3$ arba $p=5$. Jei $q=3$, tai $7q+1=22$, todėl $p=11$. Nesunkiai patikriname, kad kai $q=5$ ir $q=7$, nėra tokio didesnio už q pirminio skaičiaus, kuris dalija skaičių $7q+1$. Tarkime, kad $p>q>7$. Tuomet $50 \geqslant (p-7)(q-7) > (q-7)^2$, todėl $q-7<\sqrt{50}$, t. y. $q<15$. Liko patikrinti dar du pirminius skaičius $q=11$ ir $q=13$ ir įsitikinti, kad abiem atvejais uždavinio sąlygą tenkinančių skaičių p nėra.

Atsakymas: $(2;3)$; $(3;2)$; $(2;5)$; $(5;2)$; $(3;11)$; $(11;3)$.

2. *Išspręskite lygčių sistemą:* $x+2y=\sqrt{2z-1}$, $2y+\frac{z}{2}=\sqrt{4x-1}$, $\frac{z}{2}+x=\sqrt{8y-1}$.

Sudėję visas tris sistemos lygtis gauname: $2x+4y+z=\sqrt{4x-1}+\sqrt{8y-1}+\sqrt{2z-1}$. Padauginę abi šios lygybės puse iš dviejų ir pertvarkę, gauname, kad $(\sqrt{4x-1}-1)^2+(\sqrt{8y-1}-1)^2+(\sqrt{2z-1}-1)^2=0$. Ši lygybė teisinga tik tada, kai $\sqrt{4x-1}-1=0$, $\sqrt{8y-1}-1=0$, $\sqrt{2z-1}-1=0$. Iš čia $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=1$.

Atsakymas: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right)$.

3. *Duotas skaičius* $X=\underbrace{333\ldots333}_{2014\ trej.}4$. *Raskite visus skaičiaus* $X^2=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ *skaitmenis* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Pastebėkime, kad duotajam skaičiui X teisinga lygybė: $3X=10^{2015}+2$. Tuomet $9X^2=10^{4030}+4\cdot 10^{2015}+4=\underbrace{999\ldots999}_{4029\ \text{dev.}}+1+4\cdot\underbrace{999\ldots999}_{2014\ \text{dev.}}+4+4=\underbrace{999\ldots999}_{4029\ \text{dev.}}+4\cdot\underbrace{999\cdots999}_{2014\ \text{dev.}}+9$. Iš čia $X^2=\underbrace{111\ldots111}_{4029\ \text{vien.}}+4\cdot\underbrace{111\ldots111}_{2014\ \text{vien.}}+1=\underbrace{111\ldots111}_{2015\ \text{vien.}}\underbrace{555\ldots555}_{2013\ \text{penk.}}6$.

Atsakymas: $\underbrace{111\ldots111}_{2015\ \text{vien.}}\underbrace{555\ldots555}_{2013\ \text{penk.}}6$.

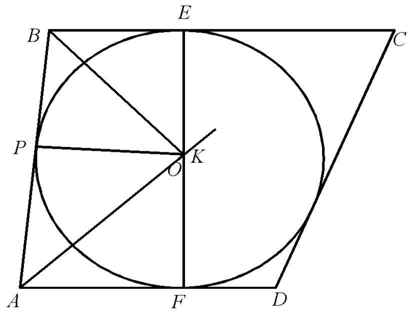
4. Žr. X klasės 4 uždavinį.

5 XII klasė

1. Žr. XI klasės 1 uždavinį.

2. *Teigiamieji skaičiai a, b, c ir d tenkina nelygybę* $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. *Įrodykite, kad* $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd$.

Pagal Koši–Švarco nelygybę turime $(a^2+b^2+c^2+d^2)(1+1+1+1) \geqslant (a+b+c+d)^2 \geqslant \frac{a^2b^2c^2d^2}{4}$. Iš čia seka, kad $a^2+b^2+c^2+d^2 > \frac{a^2b^2c^2d^2}{16} = \frac{abcd}{16}\cdot abcd$. Kai $abcd \geqslant 16$, tai $(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant abcd$. Kai $abcd<16$, pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę gauname $(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}=4\sqrt{abcd}$. Kadangi $16>abcd$, tai $4>\sqrt{abcd}$, todėl $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4\sqrt{abcd} > \sqrt{abcd}\cdot\sqrt{abcd}=abcd$.



3 pav.

3. Žr. XI klasės 3 uždavinį.

4. *Į keturkampį $ABCD$, kurio kraštinės AD ir BC nelygiagrečios, įbrėžtas apskritimas su centru O. Apskritimas liečia kraštinę BC taške E, o kraštinę AD – taške F. Tiesė AO kerta atkarpą EF taške K. Raskite kampą BKO.*

Sakykime, kad kraštinę AB apskritimas liečia taške P (3 pav.). Akivaizdu, kad $\angle PEF = \angle POA$, nes jie lygūs pusei lanko FP. Tuomet $\angle KEP + \angle KOP = \angle POA + \angle KOP = 180°$, todėl taškai K, E, P ir O yra viename apskritime. Kadangi $\angle OEB = \angle OPB = 90°$, tai taškai O, E, B ir P yra viename apskritime, kurio skersmuo – atkarpa OB. Iš čia seka, kad tam apskritimui priklauso ir taškas K, todėl $\angle BKO = 90°$.

Literatūra

[1] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mazėtis. 2011 metų VPU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**:83–88, 2011.

[2] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mazėtis. 2012 metų LEU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **53**:169–174, 2012.

[3] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mazėtis. 2013 metų LEU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **54**:111–116, 2013.

SUMMARY

Survey of LEU olympiad 2014 for young mathematicians
E. Jakaitytė, E. Mazėtis

The texts and solutions of the LEU young mathematicians olympiad – 2014 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.