LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
55 t., 2014, 50–54
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Kriterijų svorių balansavimas taikant Kemeny medianą

Aleksandras Krylovas[1], **Natalja Kosareva**[2]

[1] *Mykolo Romerio universitetas, Ekonomikos ir finansų valdymo fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
[2] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: krylovas@mruni.eu, natalja.kosareva@vgtu.lt

Santrauka. Pasiūlytas straipsnyje svorių balansavimo metodas leidžia spręsti daugiakriterinių vertinimų uždavinius, kai nagrinėjami objektai vertinami dviejų arba daugiau rūšių kriterijais, kurie nėra kiekybiškai suderinti tarpusavyje. Kriterijų svoriai balansuojami sprendžiant sąlyginio optimizavimo uždavinius, kurių sąlygos apibrėžiamos naudojant Kemeny medianą.

Raktiniai žodžiai: daugiakriteriniai sprendimo metodai, ekspertiniai vertinimai, svorių balansavimas, Kemeny mediana.

1 Žymėjimai

Tarkime, kad $T^{(j)} = (X^{(j)}, Y^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, K$ yra tam tikrų objektų kriterinių vertinimų rezultatai, K – objektų skaičius. $X^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $Y^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_m^{(j)})$, $0 \leqslant x_i^{(j)}, y_i^{(j)} \leqslant 1$. Rašysime

$$T^{(j_1)} \succcurlyeq T^{(j_2)}, \quad \text{kai } (\forall i)\ x_i^{(j_1)} \geqslant x_i^{(j_2)} \text{ and } y_i^{(j_1)} \geqslant y_i^{(j_2)}. \tag{1}$$

Pažymėkime svertines sumas

$$W_x^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} w_{xi} x_i^{(j)}, \qquad W_y^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} w_{yi} y_i^{(j)}, \tag{2}$$

čia w_{xi}, w_{yi} kriterijų $X^{(j)}$ ir $Y^{(j)}$ svertiniai koeficientai (svoriai):

$$0 \leqslant w_{xi}, w_{yi} \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n} w_{xi} = \sum_{i=1}^{m} w_{yi} = 1. \tag{3}$$

Jei galioja (1), tai galioja šie įverčiai svertinėms sumoms:

$$W_x^{(j_1)} \geqslant W_x^{(j_2)} \quad \text{and} \quad W_y^{(j_1)} \geqslant W_y^{(j_2)}. \tag{4}$$

Pažymėkime $R_x^{(j)}$ ir $R_y^{(j)}$ skaičių $W_{x,y}^{(j)}$ rangus, t. y. tokius natūraliuosius skaičius $R_{x,y}^{(j)} \in \{1, 2, \dots, K\}$, kad: $R_{x,y}^{(j_1)} < R_{x,y}^{(j_2)}$, kai $W_{x,y}^{(j_1)} > W_{x,y}^{(j_2)}$. Mažesnė rango reikšmė atitinka didesnę svertinę sumą.

Tarkime, kad $K_x, K_y \in \{0, 1, \ldots, K\}$. Apibrėžkime tokius aibės $\{1, 2, \ldots, K\}$ poaibius X_{K_x} ir Y_{K_y}, kurių elementų rangai neviršija skaičių K_x ir K_y:

$$X_{K_x} = \bigl\{\{j_1, j_2, \ldots, j_{K_x}\} : R_x^{(j_i)} \leqslant K_x\bigr\}, \qquad Y_{K_y} = \bigl\{\{j_1, j_2, \ldots, j_{K_y}\} : R_y^{(j_i)} \leqslant K_y\bigr\}.$$

Pastebėkime, kad $X_0 = Y_0 = \varnothing$, $X_K = Y_K = \{1, 2, \ldots, K\}$.

2 Atrankos uždavinys

Rašysime

$$x_{i_1} \succ x_{i_2} \succ \cdots \succ x_{i_n}, \qquad y_{i_1} \succ y_{i_2} \succ \cdots \succ y_{i_m}, \tag{5}$$

kai svertiniai koeficientai atitinkamai tenkina nelygybes:

$$w_{x,i_1} \geqslant w_{x,i_2} \geqslant \cdots \geqslant w_{x,i_n}, \qquad w_{y,i_1} \geqslant w_{y,i_2} \geqslant \cdots \geqslant w_{y,i_m}. \tag{6}$$

Nagrinėsime aibę

$$A_{K_x,K_y} = X_{K_x} \cap Y_{K_y},$$

jos elementų skaičių žymėsime $|A_{K_x,K_y}|$. Šios aibės elementai turi dideles abiejų svertinių sumų reikšmes (2), kai skaičiai K_x ir K_y yra maži. T. y. ši aibė sudaryta iš elementų, gerai tenkinančių abu kriterijus (X) ir (Y). Kuo mažesni skaičiai K_x ir K_y, tuo mažiau elementų bus aibėje A_{K_x,K_y}. Ribiniu atveju, kai $K_x = K_y = 0$, turime $A_{K_x,K_y} = \varnothing$, t. y. $|A_{0,0}| = 0$. Kitas ribinis atvejis $A_{K,K} = \{1, 2, \ldots, K\}$, t. y. $|A_{K,K}| = K$. Nagrinėsime ir kitą aibę

$$B_{K_x,K_y} = (X_{K_x} \cup Y_{K_y}) \setminus A_{K_x,K_y},$$

kurios elementai gerai tenkina tik vieną iš kriterijų (X) arba (Y). Ribiniai atvejai: $|B_{0,0}| = |B_{K,K}| = 0$.

Išnagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad 5 objektai (elementai) turi 4 vienos rūšies požymius (X) ir 3 kitos rūšies – (Y). Požymių reikšmės surašytos 1 lentelėje.

Apskaičiuokime (2) kriterijų reikšmes, kai svoriai yra tokie: $w_{x,1} = \frac{1}{2}$, $w_{x,2} = \frac{1}{4}$, $w_{x,3} = \frac{1}{8}$, $w_{x,4} = \frac{1}{8}$, $w_{y,1} = \frac{5}{8}$, $w_{y,2} = \frac{1}{4}$, $w_{y,3} = \frac{1}{8}$. Gauname

$$W_x^{(1)} = \frac{1}{2}0.4 + \frac{1}{4}0.6 + \frac{1}{8}0.7 + \frac{1}{8}0.3 = 0.475, \qquad W_y^{(1)} = \frac{5}{8}0.5 + \frac{1}{4}0.4 + \frac{1}{8}0.2 = 0.4375,$$

Panašiai apskaičiuojame visų kriterijų reikšmes ir jų rangus, kuriuos surašome į 2 lentelę.

1 lentelė. Požymių vertinimų reikšmės.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
1	0.4	0.6	0.7	0.3	0.5	0.4	0.2
2	0.5	0.3	0.7	0.3	0.6	0.7	0.2
3	0.2	0.4	0.6	0.5	0.7	0.7	0.4
4	0.5	0.3	0.5	0.4	0.6	0.8	0.2
5	0.6	0.2	0.8	0.8	0.4	0.5	0.3

2 lentelė. Kriterijų reikšmės ir atitinkami rangai.

j	$W_x^{(j)}$	$W_y^{(j)}$	$R_x^{(j)}$	$R_y^{(j)}$
1	0.475	0.4375	2	4
2	0.45	0.45	3	3
3	0.3375	0.6625	5	1
4	0.4375	0.60	4	2
5	0.55	0.4125	1	5

Anksčiau apibrėžtos aibės X_{K_x} ir Y_{K_y} bus: $X_1 = \{5\}$, $X_2 = \{1,5\}$, $X_3 = \{1,2,5\}$, $X_4 = \{1,2,4,5\}$, $Y_1 = \{3\}$, $Y_2 = \{3,4\}$, $Y_3 = \{2,3,4\}$, $Y_4\{1,2,3,4\}$, $A_{1,1} = \varnothing$, $B_{1,1} = \{3,5\}$, $A_{2,2} = \varnothing$, $B_{2,2} = \{1,3,4,5\}$, $A_{3,3} = \{2\}$, $B_{3,3} = \{1,3,4,5\}$ ir t. t.

Autorių straipsnyje [1] pasiūlytas kriterijų (X) ir (Y) derinimo algoritmas, kurio esmė svertinių koeficientų w_{xi}, w_{yi} tinkamas parinkimas. Pažymėkime $W_{X,Y}$ vektorių $(\ldots, w_{x,y,i}, \ldots)$, tenkinančių apribojimus (3) ir (6), aibes. Spręsime du optimizavimo uždavinius

$$\max_{W_{X,Y}} |A_{K_x,K_y}|, \qquad \min_{W_{X,Y}} |B_{K_x,K_y}|. \tag{7}$$

3 Kemeny mediana

Apribojimai svoriams (6) paprastai nustatomi iš ekspertinių įverčių ir tai galima daryti įvairiais būdais. Tarkime, kad l ekspertų nustato požymio kriterijų pirmenybes:

$$\begin{array}{c} x^{(1)}_{i_1^{(1)}} \succ x^{(1)}_{i_2^{(1)}} \succ \cdots \succ x^{(1)}_{i_n^{(1)}}, \\ x^{(2)}_{i_1^{(2)}} \succ x^{(2)}_{i_2^{(2)}} \succ \cdots \succ x^{(2)}_{i_n^{(2)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(l)}_{i_1^{(l)}} \succ x^{(l)}_{i_2^{(l)}} \succ \cdots \succ x^{(l)}_{i_n^{(l)}}. \end{array} \tag{8}$$

Optimizavimo uždavinio (7) aibėms $W_{X,Y}$ nustatyti reikia sukonstruoti apibendrintą (8) ekspertų įverčių pirmenybę (5). Šiame straipsnyje tam siūloma panaudoti Kemeny medianą.

Vektorių aibėje $\{(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}),\ s = 1,2,\ldots,l\} \subset [0,1]^n \subset R^n$ apibrėžkime griežtosios tvarkos sąryšį (žr., pvz., [3])

$$\begin{aligned} S^{(s)} = \big\{ &\big(x_{j_1}^{(s)}, x_{j_2}^{(s)}\big), \big(x_{j_1}^{(s)}, x_{j_3}^{(s)}\big), \ldots, \big(x_{j_1}^{(s)}, x_{j_n}^{(s)}\big), \\ &\big(x_{j_2}^{(s)}, x_{j_3}^{(s)}\big), \big(x_{j_2}^{(s)}, x_{j_4}^{(s)}\big), \ldots, \big(x_{j_2}^{(s)}, x_{j_n}^{(s)}\big), \ldots, \big(x_{j_{n-1}}^{(s)}, x_{j_n}^{(s)}\big) \big\}, \end{aligned}$$

kurį atitinka kvadratinė matrica $A_{S^{(s)}} = \|a_{ij}\|$, o jos elementai yra:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } (x_i^{(s)}, x_j^{(s)}) \in S^{(s)}, \\ 0, & \text{kai } (x_i^{(s)}, x_j^{(s)}) \notin S^{(s)}. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad $(\forall i)\, a_{ii} = 0$ – sąryšis antirefleksyvusis ir $a_{ij} = 1 - a_{ji}$, kai $i \neq j$ – antisimetrinis.

Apibrėžkime funkciją

$$\rho_A\bigl(S^{(1)}, S^{(2)}\bigr) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bigl|a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)}\bigr|.$$

Ji yra tam tikras skirtumo tarp sąryšių matas, o jos reikšmės sutampa su Kemeny (žr.[2]) atstumo funkcijos reikšmėmis.

Pavyzdžiui, tegul

$$S^{(1)} = \bigl\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\bigr\} \sim A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^{(2)} = \bigl\{(4,1), (4,2), (4,3), (3,1), (3,2), (2,1)\bigr\} \sim A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Funkcija ρ šiuo atveju įgyja reikšmę $\rho_A(S^{(1)}, S^{(2)}) = 12$.

Tarkime, kad turime l ekspertų nustatytas pirmenybes $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(l)}$. Geriausiai suderintu su šiais vertinimais vadinsime pirmenybę S_A, kuri vadinama *mediana*:

$$S_A = \arg\min_S \sum_{j=1}^{l} \rho_A\bigl(S, S^{(j)}\bigr).$$

Pastebėkime, kad sąryšiai $S^{(j)}$ vienareikšmiškai apibrėžiami perstatomis $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Pavyzdžiui, sąryšiai $S^{(1)}$ ir $S^{(2)}$ apibrėžiami atitinkamai perstatomis $(1,2,3,4)$ ir $(4,3,2,1)$. Nagrinėsime funkcijos ρ_A analogus.

$$\rho_M\bigl(S^{(1)}, S^{(2)}\bigr) = \sum_{i=1}^{n}\bigl|j_i^{(1)} - j_i^{(2)}\bigr|,$$

$$\rho_I(S^{(1)}, S^{(2)}) = \mathit{Invers}\begin{pmatrix} j_1^{(1)} & j_2^{(1)} & \dots & j_n^{(1)} \\ j_1^{(2)} & j_2^{(2)} & \dots & j_n^{(2)} \end{pmatrix},$$

čia *Invers*$(\cdots)$ reiškia keitinio $\begin{pmatrix} j_1^{(1)} & j_2^{(1)} & \dots & j_n^{(1)} \\ j_1^{(2)} & j_2^{(2)} & \dots & j_n^{(2)} \end{pmatrix}$ inversijų skaičių.

Nagrinėjamo pavyzdžio atveju

$$\rho_M\bigl(S^{(1)}, S^{(2)}\bigr) = |1-4| + |2-3| + |3-2| + |4-1| = 8,$$
$$\rho_I(S^{(1)}, S^{(2)}) = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Analogiškai ieškome medianų S_M ir S_I.

4 Taikymas

Pasiūlytas šiame straipsnyje svorių balansavimo metodas leidžia laikantis tos pačios schemos spręsti daugiakriterinius uždavinius, kai reikia surikiuoti vertinamus dviejų (arba daugiau) rūšių (X) ir (Y) kriterijais objektus, o šie kriterijai nėra kiekybiškai suderinti tarpusavyje. Pavyzdžiui, tai gali būti tam tikros veiklos subjekto vidiniai ir išoriniai vertinimai.

Autorių straipsnyje [1] sprendžiamas vadybinis personalo atrankos uždavinys, kai 118 pretendentų vertinami $n = 6$ objektyviais (matavimo) kriterijais ir $m = 9$ subjektyviais (vadovų) vertinimais pagal nurodytus požymius. Šių požymių (pavyzdžiui, tokių kaip specialiųjų žinių lygis, darbo kokybė, santykiai su kolegomis) santykines reikšmes (8) vertino $l = 22$ ekspertai. Aibės $W_{X,Y}$ (t. y. (5) pirmenybės) buvo nustatytos pagal požymių rangų sumas (Borda principas, žr. [4]), o optimizavimo (7) uždaviniui spręsti pasiūlytas euristinis algoritmas.

Dėl apribojimų straipsnio apimčiai mes neteikiame pradinių [1] duomenų ir skaičiavimo rezultatų. Atrankos uždavinio sprendinys – 12 elementų aibė (10% geriausių darbuotojų) mes palyginome su to paties (7) uždavinio sprendiniu, gautu taikant Kemeny medianą. Pastebėkime, kad medianoms ieškoti šiuo atveju pakanka atlikti pilną variantų perrinkimą, kurių atitinkamai bus $6! = 720$ ir $9! = 362\,880$. Gaunamas sprendinys – 12 elementų aibė skiriasi nuo anksčiau gautos tik vienu elementu. Tai, mūsų manymu, rodo pakankamai gerai pagrįstą sprendimą.

Pabaigai pastebėsime, kad aibes $W_{X,Y}$ galima konstruoti ir kitais būdais. Jų palyginimas nėra ištirtas ir yra mūsų tolimesnių tyrimų objektas.

Literatūra

[1] S. Dadelo, A. Krylovas, N. Kosareva, E.K. Zavadskas and R. Dadelienė. Algorithm of maximizing the set of common solutions for several mcdm problems and it's application for security personnel scheduling. *Int. J. Comput. Comm. Contr.*, **9**(4):140–148, 2014.

[2] J.G. Kemeny and J. Laurie Snell. *Mathematical Models in the Social Sciences.* New York, 1963.

[3] A. Krylovas. *Diskrečioji matematika.* Technika, Vilnius, 2009.

[4] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

SUMMARY

Criteria weights balancing using Kemeny median
A. Krylovas, N. Kosareva

The proposed in the article weights balancing approach enables to solve multiple criteria decision making tasks for the cases when objects are estimated by the two or more groups of the criteria which are not quantitatively compatible with each other. Criteria weights are being balanced by solving conditional optimization problems. The conditions for the certain optimization problem are determined by the construction of Kemeny median.

Keywords: multiple criteria decision making, expert assessments, weights balancing, Kemeny median.