Lietuvos matematikos rinkinys ISSN 0132-2818
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B www.mii.lt/LMR/
55 t., 2014, 72–77

Rezonansų atsiradimo sąlygos akustinių periodinių bangų sąveikos modelyje

Olga Lavcel-Budko[1,2], **Aleksandras Krylovas**[1,2]

[1] *Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] *Mykolo Romerio Universitas, Ekonomikos ir finansų valdymo fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
E. paštas: [1]akr@fm.vgtu.lt, olecka@gmail.com
E. paštas: [2]krylovas@mruni.eu, olgal@mruni.eu

Santrauka. Straipsnis yra autorių [6] darbo tęsinys. Nagrinėjama dujų dinamikos diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema esant bendrojo pavidalo būsenos lygtims reiškiančioms dujų slėgį ir vidinę energiją.

Realiosios dujos apytiksliai tenkina idealiųjų dujų būsenos lygtį, tik esant pakankamai aukštai temperatūrai ir mažam tankiui. Paprasčiausia ir geriausiai žinoma yra Van der Vaalso (J.D. Van der Waals) lygtis, kurios du parametrai priklauso nuo dujų savybių. Atlikta darbe sukonstruotos suvidurkintos sistemos analizė leido nustatyti rezonanso atsiradimo sąlygas, van der Vaalso lygtimi aprašomoms realioms dujoms.

Raktiniai žodžiai: dujų dinamika, akustinės bangos, rezonansai, asimptotinė analizė, hiperbolinės sistemos, vidurkinimas.

1 Uždavinio formulavimas

Nagrinėjama pirmosios eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis dujų dinamikos sistema, kai šilumos laidumo ir klampumo koeficientai lygūs nuliui (žr., pvz., [9, 231 psl.]). Fizikine prasme nagrinėjamos dujų rimties būsenos mažos perturbacijos (trikdžiai), dėl kurių atsiranda akustinių bangų sąveika. Sistema papildoma bendromis būsenos lygtimis, kurios nepriklauso nuo dujų savybių:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho\mathcal{E}+\rho\frac{u^2}{2}\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ P+\rho u^2\\ \rho u\mathcal{E}+Pu+\rho\frac{u^3}{2}\end{pmatrix}=0,\quad P=P(\rho,\theta),\ \mathcal{E}=\mathcal{E}(\rho,\theta),\tag{1}$$

čia ρ – dujų tankis, u – greitis, θ – temperatūra, P – slėgis, $\mathcal{E}$ – vidinė energija.

Būsenos lygtis bendruoju atveju užrašoma taip:

$$f(P,\rho,\theta)=0.\tag{2}$$

Būsenos lygties negalima gauti iš termodinamikos dėsnių, ji gaunama iš empirinių duomenų arba statistinės fizikos metodais.

Paprasčiausias dujų dinamikos modelis – idealiosios dujos – konstruojamas esant prielaidoms, kad dujų atomai arba molekulės yra nesąveikaujantys tarpusavyje neturintys tūrio absoliučiai tamprieji materialieji taškai. Šiuo atveju sistemos būsena aprašo Klaiperono (E. Clapeyron) lygtimi

$$P = \mathcal{R}\rho\theta, \tag{3}$$

čia $\mathcal{R} = nR$, n – medžiagos kiekis, $R = 8.3144\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$.

Realiosios dujos apytiksliai tenkina (3) lygtį tik esant pakankamai aukštai temperatūrai θ ir mažam tankiui ρ. Siekiant tiksliau apibrėžti realiųjų dujų būseną, literatūroje nagrinėjami keli šimtai būsenos lygčių. Paprasčiausia ir geriausiai žinoma yra Van der Vaalso (J.D. Van der Waals) lygtis

$$\left(P + \frac{a}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = \mathcal{R}\theta. \tag{4}$$

Čia konstantos a, b priklauso nuo dujų savybių, o kai $a = b = 0$ lygtys (4) ir (3) yra ekvivalenčios.

Esant aukštam slėgiui P Van der Vaalso (4) lygtis yra netinkama, nes ji nemodeliuoja atsirandančių stūmos jėgų [2]. Todėl literatūroje nagrinėjamos įvairios (4) lygties modifikacijos. Paminėkime kelias dviparametrines lygtis [1] (čia $v = \frac{1}{\rho}$; a, b – priklausantys nuo dujų savybių koeficientai, nustatomi iš eksperimentinių duomenų): Bertlo (D. Berthelot, 1907)

$$\left(P + \frac{a}{\theta v^2}\right)(v - b) = \mathcal{R}\theta, \tag{5}$$

Diteričio (C. Dieterici, 1899)

$$P(v - b) = \mathcal{R}e^{-\frac{a}{\mathcal{R}\theta v}}, \tag{6}$$

Redlicho ir Kvongo [8, 1949]

$$\left(P + \frac{a}{\sqrt{\theta}\, v(v + b)}\right)(v - b) = \mathcal{R}\theta. \tag{7}$$

Pastebėkime, kad realiųjų dujų būsenos lygčių tikslumo tyrimas lieka aktualus ir dabar [4].

2 Suvidurkintoji lygčių sistema

Tarkime, kad ε – mažas teigiamas parametras, ir nagrinėsime mažos amplitudės (akustines) bangas:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1(t, x; \varepsilon), \qquad u = u_0 + \varepsilon u_1(t, x; \varepsilon), \qquad \theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1(t, x; \varepsilon). \tag{8}$$

Funkcijas ρ_1, u_1, θ_1 išreiškiame kaip Rymano invariantų v_1, v_2, v_3 tiesinę kombinaciją ir konstruojame suvidurkintąją lygčių sistemą. Autorių darbe [6] buvo gauta (1) sistemos suvidurkinta lygčių sistema, kurios išsamus tyrimas parodė jos priklausomumą nuo dviejų parametrų μ ir ν:

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau} - \mu V_j \frac{\partial V_j}{\partial y_j} = \nu M_j\left[V_2 \frac{\partial V_k}{\partial y_k}\right], \tag{9}$$

Čia $\tau = \varepsilon t$ – lėtas laikas, $y_j = x - \lambda_j t$ – greitas charakteristinis kintamasis, M_j – vidurkinimo pagal charakteristikos operatoriai. Parametrai μ ir ν reiškiami formulėmis:

$$\mu = \frac{1}{2d}(-2\alpha + d(h_{211}\alpha^2 - 1 + h_{213}\alpha\gamma + h_{231}\alpha\gamma + h_{233}\gamma^2) + \beta(\alpha h_{312} - \gamma + h_{332}\gamma)), \tag{10}$$

$$\nu = \frac{1}{2d}(\beta - d(h_{211}\alpha\beta + h_{231}\beta\gamma - h_{231}\alpha - h_{233}\gamma) + \beta(-\beta h_{321} + h_{332})), \tag{11}$$

čia

$$\overline{P} = \frac{P_0 - \mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}}, \ \alpha = \frac{\rho_0}{\lambda_0}, \ \beta = \frac{P_{0\theta}}{P_{0\rho}}, \ \gamma = \frac{\overline{P}}{\lambda_0}, \ d = \alpha + \beta\gamma,$$

$\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{\overline{P}P_{0\theta}}{\rho_0} + P_{0\rho}}$ – akustinių bangų sklidimo (garso) greitis.

$$h_{211} = -\frac{P_{0\rho\rho}}{\rho_0} + \frac{P_{0\rho}}{\rho_0^2}, \ h_{213} = -\frac{P_{0\rho\theta}}{\rho_0} + \frac{P_{0\theta}}{\rho_0^2},$$

$$h_{231} = -\frac{P_{0\rho\theta}}{\rho_0}, \ h_{233} = -\frac{P_{0\theta\theta}}{\rho_0},$$

$$h_{312} = \frac{P_{0\rho} - 2\mathcal{E}_{0\rho}\rho_0 - \mathcal{E}_{0\rho\rho}\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}} + \frac{P_0 - \mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2}{\mathcal{E}_{0\theta}\rho_0^2} + \frac{P_0\mathcal{E}_{0\theta\rho}\rho_1 - \mathcal{E}_{0\rho\theta}\mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^2},$$

$$h_{332} = \frac{P_{0\theta} - 2\mathcal{E}_{0\rho\theta}\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}} + \frac{P_0\mathcal{E}_{0\theta\theta} - \mathcal{E}_{0\theta\theta}\mathcal{E}_{0\rho}\rho_0^2}{\rho_0\mathcal{E}_{0\theta}^2}.$$

Pastebime, kad suvidurkintų lygčių koeficientai priklauso nuo būsenos lygčių funkcijų $P = P(\rho,\theta)$ ir $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho,\theta)$ ir jų pirmosios bei antrosios eilės dalinių išvestinių. Jei būsenos lygtis išreikšta viena iš (5)–(7), formulių, koeficientus irgi galima išreikšti priklausomomis nuo tų pačių empirinių parametrų formulėmis [7].

3 Realiųjų dujų analizė

Analizę pradėkime nuo **idealiųjų politropinių dujų**. Tada dujų būsenos lygtys turi tokį pavidalą: $P = \mathcal{R}\rho\theta$, $\mathcal{E} = c_V\theta$.

Apskaičiavus dalines išvestines, gauname:

$$P_{0\rho} = \mathcal{R}\theta_0, \qquad P_{0\theta} = \mathcal{R}\rho_0, \qquad P_{0\rho\theta} = \mathcal{R}, \qquad P_{0\rho\rho} = P_{0\theta\theta} = 0, \qquad \mathcal{E}_{0\theta} = c_V,$$
$$\mathcal{E}_{0\rho} = \mathcal{E}_{0\rho\rho} = \mathcal{E}_{0\rho\theta} = \mathcal{E}_{0\theta\theta} = 0.$$

Suvidurkintos sistemos koeficientai priklauso nuo šių dydžių:

$$h^i_{211} = \frac{\mathcal{R}\theta_0}{\rho_0^2}, \qquad h^i_{213} = h^i_{233} = 0, \qquad h^i_{231} = -\frac{\mathcal{R}}{\rho_0}, \qquad h^i_{312} = \frac{2\mathcal{R}\theta_0}{c_V\rho_0}, \qquad h^i_{332} = \frac{\mathcal{R}}{c_V},$$

$$\lambda^i_0 = \sqrt{\mathcal{R}\theta_0\left(\frac{\mathcal{R}}{c_v} + 1\right)}, \qquad \alpha^i = \frac{\rho_0}{\lambda^i_0}, \qquad \beta^i = \frac{\rho_0}{\theta_0}, \qquad \gamma^i = \frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_V\lambda^i_0}, \qquad \overline{P}^i = \frac{\mathcal{R}\theta_0}{c_V}.$$

Esant idealioms dujoms rezonansas negali atsirasti jei, pradiniu laiko momentu, galioja sąlyga [6]:

$$\rho_1(0,x;\varepsilon) = \frac{\rho_0 c_v}{\mathcal{R}\theta_0}\theta_1(0,x;\varepsilon) + O(\varepsilon). \tag{12}$$

Tokių atvieju turime mažos amplitudės ilgąsias periodinės bangas, bėgančias su pastoviais greičiais. Kai (12) sąlyga yra neišpildyta, nagrinėjame (9) suvidurkintą sistemą. Ši sistema aprašo rezonansinį ir nerezonansinį atvejus, priklausomai nuo to, ar koeficientas $\nu \neq 0$.

Apskaičiavę suvidurkintos sistemos (9) koeficientus pagal (2) ir (11) formules gauname:

$$\mu = -\frac{\mathcal{R} - 2c_v}{2c_v}, \qquad \nu = -\frac{\sqrt{\mathcal{R}c_v}}{2\sqrt{\theta_0(\mathcal{R} + c_v)}}. \tag{13}$$

Matome, kad idealiųjų dujų atveju ν – visada yra pastovaus ženklo. Todėl galime teigti, kad jeigu pradiniu laiko momentu negalioja (12) sąlyga, tai idealiose dujose visada įvyksta rezonansas.

Dabar nagrinėsime **Van der Vaalso politropines dujas**. Šiuo atveju $P = \frac{\mathcal{R}\rho\theta}{1-\rho b} - a\rho^2$, o antroji būsenos lygtis nekeičiama $\mathcal{E} = c_V\theta$.

Kai a ir b lygūs nuliui, turime idealias politropines dujas ir siekiame nustatyti, ar dėl atsiradusiu papildomų koeficientų a ir b dujose gali dingti rezonansas.

Pritaikius linearizaciją, papildomus narius galima užrašyti taip:

$$P^w \approx \mathcal{R}\rho\theta - a\rho^2 + \mathcal{R}\rho^2\theta b = P^i + \Delta P^w.$$

$$P^w_{0\rho} = P^i_{0\rho} + \Delta P^w_{0\rho} \approx [\mathcal{R}\theta_0] + [2\mathcal{R}\rho_0\,\theta_0\,b - 2a\rho_0],$$
$$P^w_{0\theta} = P^i_{0\theta} + \Delta P^w_{0\theta} \approx [\mathcal{R}\rho_0] + [\mathcal{R}\rho_0^2 b],,$$
$$P^w_{0\rho\theta} = P^i_{0\rho\theta} + \Delta P^w_{0\rho\theta} \approx [\mathcal{R}] + [2\mathcal{R}\rho_0\,b],,$$
$$P^w_{0\rho\rho} = \Delta P^w_{0\rho\rho} \approx [-2a + 2\mathcal{R}\theta_0 b],,$$
$$P^w_{0\theta\theta} = 0,\ \mathcal{E}^w_{0\theta} = \mathcal{E}^i_{0\theta} = c_V,\ \mathcal{E}^w_{0\rho} = \mathcal{E}^w_{0\rho\rho} = \mathcal{E}^w_{0\rho\theta} = \mathcal{E}^w_{0\theta\theta} = 0.$$

Galime pastebėti, kad sulyginus su idealiosiomis politropinėmis dujomis, van der Vaalso lygtimi apibrėžiamose politropinėse dujose atsiranda dar viena nelygi nuliui išvestinė $P_{0\rho\rho}$.

Tolimesniam van der Vaalso politropinių dujų nagrinėjimui pasirenkame atskirą atvejį. Nagrinėjame realias dujas – deguonį: $a = 0{,}136\frac{Hm^4}{\mathrm{mol}^2}$, $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}\frac{m^4}{\mathrm{mol}}$.

Apskaičiavę koeficientą ν Van der Vaalso lygčiai pagal formulę (12), gauname rezultatus, žr. 1 lentelę.

Skaičiavimai rodo, kad ν gali būti lygus nuliui. O tai reiškia kad, Van der Vaalso dujose neatsiras rezonansas. Jis neatsiranda, pavyzdžiui, esant tokioms sąlygoms: $\theta_0 = 400$, $\rho_0 = 11885{,}8$; $\theta_0 = 350$, $\rho_0 = 11715{,}3$; $\theta_0 = 300$, $\rho_0 = 11493{,}4$; $\theta_0 = 250$, $\rho_0 = 11193{,}5$.

4 Išvados

1. Dujų dinamikos diferencialinėms lygtims suvidurkintos sistemos asimptotinė analizė leido sukonstruoti tolygiai tinkamą ilgajame laiko intervale asimptotinę aproksimaciją, aprašančią periodinių akustinių bangų rezonansinę sąveiką.

1 lentelė. Parametro ν reikšmės (O_2).

θ_0, (K)	ρ_0, (m^{-3})						
	11100	11250	11400	11550	11700	11852	12000
200	0,0305	0,0443	0,0580	0,0717	0,0852	0,0985	0,1116
250	−0,0037	0,0022	0,0082	0,0142	0,0202	0,0262	0,0321
300	−0,0100	−0,0062	−0,0024	0,0014	0,0053	0,0092	0,0130
350	−0,0116	−0,0088	−0,0060	−0,0035	−0,0003	0,0026	0,0055
400	−0,0120	−0,0098	−0,0075	−0,0052	−0,0029	−0,0006	0,0018
450	−0,0119	−0,0101	−0,0082	−0,0062	−0,0043	−0,0023	−0,0003
500	−0,0117	−0,0102	−0,0084	−0,0067	−0,0050	−0,0033	−0,0015

2. Nustatytos periodinių bangų rezonanso atsiradimo ir neatsiradimo sąlygos.
3. Atliktas idealiųjų ir Van der Waalso dujų palyginamasis tyrimas. Rezultatai parodė parametrų sąryšį, kuriam esant realiose dujose, palyginus su idealiomis dujomis, neatsiranda rezonansas.
4. Gauti rezultatai apibendrina anksčiau nagrinėtą idealiųjų politropinių dujų atvejį [5].

Literatūra

[1] D. Berthelot. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures Tome XIII (Paris: Gauthier-Villars, 1907); C. Dieterici. *Ann. Phys. Chem. Wiedemanns Ann.*, **69**:685, 1899. Cituojama pagal Wikipedia: Real gas. Adresas internete: http://en.wikipedia.org/wiki/Real_gas.

[2] N.M. Belyaev. *Termodinamika*. Vysčia škola, Kiev, 1987, 344 pp.

[3] K. Bulota ir P. Survila. *Algebra ir skaičių teorija 1*. Mokslas, Vilnius, 1989.

[4] R.L. Fogelson and E.R. Likhachev. Equation of state of a real gas. *Techn. Phys.*, **49**(7):935–937, 2004.

[5] A. Krylovas and R. Čiegis. Asymptotical analysis of one-dimensional gas dynamics equations. *Math. Model. Anal.*, **6**(1):117–128, 2001.

[6] A. Krylovas and O. Lavcel-Budko. Vienmačio dujų dinamikos uždavinio sprendinio asimptotinis aproksimavimas. *Liet. mat. rink. LMD darbai, ser B*, **54**:48–53, 2013.

[7] J.M. Powers. *Lecture Notes on Thermodynamics*. Notre Dame, IN, USA, 2013. 382 pp. Available from Internet: http://ocw.nd.edu/search?Subject%3Alist=thermodynamics.

[8] O. Redlich and J.N.S. Kwong. On the thermodynamics of solutions. V. An equation of state. Fugacities of gaseous solutions. *Chem. Rev.*, **44**(1):233–244, 1949. Doi:10.1021/cr60137a013.

[9] B.L. Rozhdestvenskii and N.N. Yanenko. *Systems of Quasilinear Equations and Their Application to Gas Dynamics*. Nauka, Moscow, 1978.

SUMMARY

Conditions of resonance interaction of acoustic periodic waves interaction
Olga Lavcel-Budko, Aleksandras Krylovas

We consider differential equations of gas dynamics, when the thermal conductivity and viscosity coefficients equal zero. The system is supplemented with equations of state for the gas pressure and the total energy; these equations do not depend on the properties of gas, i.e. are of a general form. We construct asymptotical approximation for the resonance interaction of acoustic periodic waves, which is uniformly valid in the long time interval. A system coefficient allows determining the resonance occurring condition the relation between gas pressure and temperature at the initial time. We investigate the ideal and non-ideal gas and determine the relationship between the parameters, which causes the of resonanse vanishing in non-ideal gas.

Keywords: gas dynamics, acoustic waves, resonance, asymptotics methods.