Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
56 t., 2015, 52–56

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

2015 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Vilma Gesevičienė[1], Edmundas Mazėtis[1], Eglė Jakaitytė[2]

[1] *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų 39, LT-08106, Vilnius
[2] *Nacionalinė M. K. Čiurlionio menų mokykla*
T. Kosciuškos 11, LT-01100, Vilnius
E. paštas: vilma.geseviciene@leu.lt, edmundas.mazetis@leu.lt, egle.jakaityte@gmail.com

Santrauka. Straipsnyje aptariami 2015 m. LEU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

1 Įvadas

2015 m. kovo 7 d. vyko XXIV jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė docentas E. Mazėtis, jam talkino VU dėstytojas A. Novikas. Straipsnyje pateikiamos uždavinių sąlygos ir sprendimai ta forma, kaip ir ankstesniuose autorių darbuose [1, 2, 3].

Olimpiadoje dalyvavo apie 90 IX–XII klasių moksleivių. Tarp dalyvių buvo moksleivių, jau pasižymėjusių ne tik Lietuvos, bet ir tarptautinėse olimpiadose. Dešimt dalyvių (po 2–3 iš kiekvienos klasės) buvo pakviesti į Lietuvos mokinių matematikos olimpiadą.

2 IX klasė

1. *Yra* 5 *iš pažiūros vienodos monetos. Trys iš jų tikros, dvi – netikros. Tikros monetos sveria vienodai, abi netikros monetos irgi sveria vienodai, bet nėra žinoma, ar netikra moneta lengvesnė ar sunkesnė nei tikra. Kiek mažiausiai reikia atlikti svėrimų svarstyklėmis be svarsčių, norint nustatyti bent vieną tikrą monetą?*

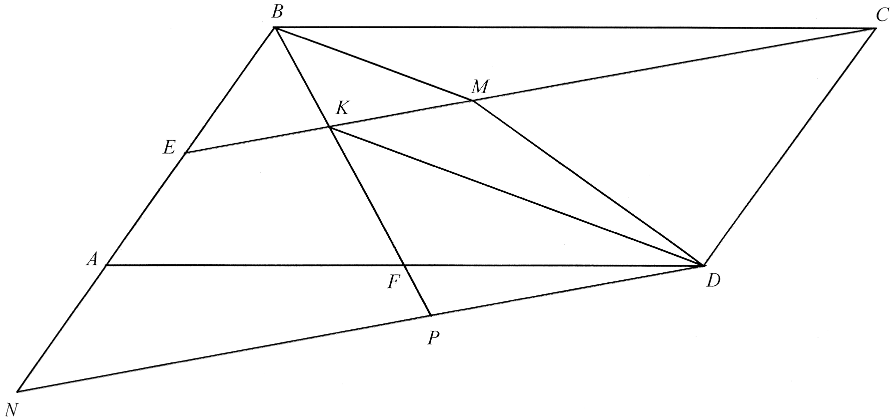
Sprendimas. Akivaizdu, kad vieno svėrimo nepakanka, nes jei sveriame dvi monetas ir abiejose lėkštelėse yra vienodai sveriančios monetos, tikrosios monetos surasti neįmanoma. Įrodysime, kad dviejų svėrimų pakanka. Sunumeruojame monetas nuo 1 iki 5 ir dedame ant lėkštelių iš pradžių pirmąją ir antrąją, po to trečiąją ir ketvirtąją. Galimi trys atvejai:

a) abiem svėrimais svarstyklės yra pusiausvyroje, tuomet penktoji moneta yra tikroji;

b) vienu svėrimu svarstyklės yra pusiausvyroje, o kitu ne, tuomet bet kuri iš vienodai sveriančių monetų yra tikroji;

c) abiem atvejai svarstyklės nėra pusiausvyroje, tuomet penktoji moneta – tikroji.

Atsakymas: reikia sverti du kartus.



1 pav.

2. *Raskite visas natūraliųjų skaičių poras* (a,b), *su kuriomis skaičiai* $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ *ir* $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ *yra sveikieji.*

Sprendimas. Jei $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ sveikasis skaičius, tai $\frac{b^2+a}{a^2-b} \geqslant 1$, $b^2+a \geqslant a^2-b$. Padauginę šią nelygybę iš 4 ir pridėję prie abiejų pusių po vienetą, gauname $4b^2+4b+1 \geqslant 4a^2-4a+1$, t. y. $(2b+1)^2 \geqslant (2a-1)^2$. Todėl $a \leqslant b+1$. Analogiškai, iš nelygybės $\frac{a^2+b}{b^2-a} \geqslant 1$ gauname, kad $a \geqslant b-1$. Taigi $b-1 \leqslant a \leqslant b+1$, todėl galimi trys atvejai. Kai $a = b+1$, tai $\frac{a^2+b}{b^2-a} = 1 + \frac{4b+2}{b^2-b-1}$. Bet $4b^2+2 \geqslant b^2-b-1$ tik su natūraliaisiais skaičiais 1, 2, 3, 4 ir 5. Tuomet tinka tik $b=1$ ir $b=2$. Analogiškai tiriame atvejį kai $a=b$ ir gauname $b=2$, $b=3$. Atveju $a=b-1$ tinka $b=2$ ir $b=3$.

Atsakymas: $(2,1),(3,2),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)$.

3. *Apskritime pažymėta* 2015 *taškų. Ar galima kiekviename taške parašyti po natūralųjį skaičių taip, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių dalmuo* (*gaunamas dalijant didesnįjį jų iš mažesniojo*) *būtų pirminis skaičius?*

Sprendimas. Sakykime, kad apskritime pažymėjome 2015 taškų: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tenkinančių uždavinio sąlygą. Akivaizdu, kad bet kurie du gretimi skaičiai nelygūs, priešingu atveju jų dalnuo būtų lygus 1, o 1 nėra pirminis skaičius. Išskaidykime kiekvieną skaičių pirminiais dauginamaisiais. Jei gretimų skaičių dalmuo yra pirminis skaičius $q \neq 1$, tai vieno jų skaidinyje yra pirminis skaičius q, o kito skaidinyje jo nėra, bet visi kiti šių skaičių pirminiai dauginamieji yra vienodi. Tarkime, kad skaičius a_k išskaidomas į n_k pirminių daugiklių (tarp jų gali būti ir vienodų). Taigi, skaičiai n_p ir n_{p+1} yra skirtingo lyginumo, koks bebūtų $p = 1, 2, \ldots, 2014$. Todėl skaičiai $n_1, n_2, \ldots, n_{2015}$ yra to paties lyginumo. Bet skaičiai a_1 ir a_{2015} irgi gretimi, todėl n_1 ir n_{2015} turi būti skirtingo lyginumo skaičiai. Prieštara įrodo, kad toks taškų išdėstymas negalimas.

Atsakymas: negalima.

4. *Taškai E ir F yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB ir AD vidurio taškai. Atkarpos CE ir BF susikerta taške K. Atkarpoje EC yra taškas M toks, kad tiesės BM ir KD yra lygiagrečios. Raskite trikampio KFD ir trapecijos $KBMD$ plotų santykį.*

Sprendimas. Nubrėžiame tiesę DN, lygiagrečią su tiese CE, kuri tieses AB ir BF kerta taškuose N ir P (žr. 1 pav.). Akivaizdu, kad $EN = CD = AB = 2BE$.

Be to, $\frac{BK}{KP} = \frac{BE}{EN} = \frac{1}{2}$, todėl $KP = 2BK$. Iš trikampių BKC ir FPD panašumo seka, kad $FP = \frac{1}{2}BK$, taigi $KF = \frac{3}{2}BK$, o $\frac{KF}{KP} = \frac{3}{4}$. Iš trikampių KDP ir BMK panašumo seka, kad $\frac{KD}{BM} = 2$. Iš čia gauname: jei trikampio BKM plotas lygus S, tai trikampio KPD plotas lygus $4S$, o trikampio KFD plotas $S_1 = \frac{KF}{KP} \cdot S_{KPD} = 3S$. Kadangi tiesės BM ir KD lygiagrečios, tai $\frac{S_{KMD}}{S_{BKM}} = \frac{KD}{BM} = 2$, t. y. $S_{KMD} = 2S$. Taigi $S_{KBMD} = S_{BKM} + S_{KMD} = 3S$, t.y. trikampio KFD ir keturkampio $KBMD$ plotai lygūs.

Atsakymas: 1.

3 X klasė

1. *Seka (x_n) apibrėžiama taip: $x_{n+1} = x_n^2 - 5$, jei x_n – nelyginis, ir $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, jei x_n – lyginis skaičius. Jei x_1 yra bet kuris didesnis už 5 nelyginis skaičius, tai sekoje (x_n) yra kiek norima didelių narių. Įrodykite.*

Sprendimas. Sakykime, kad $a_1 = 2k+1$ – nelyginis skaičius ir $k > 2$. Tuomet $a_2 = 4k^2 + 4k - 4$ ir $a_3 = 2k^2 + 2k - 2$ yra lyginiai skaičiai, o $a_4 = k^2 + k - 1$ – nelyginis skaičius. Kai $k > 2$, tai $k^2 > k + 2$. Pridedame prie abejų lygybės pusių po $k-1$ ir gauname, kad $k^2+k-1 > 2k+1$, t. y. $a_4 > a_1$. Toliau gauname, kad $a_7 > a_4$, $a_{10} > a_7$ ir t. t. Taigi natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_4, a_7, \ldots, a_{3k+1}, \ldots$ yra didėjanti, ir koks bebūtų skaičius N, egzistuoja toks sekos nario numeris $3p-2$, kuriuo pradedant, sekos nariai yra didesni už N.

2. *Kuris iš skaičių $3^{\sqrt{2}}$ ar $2^{\sqrt{3}}$ yra didesnis?*

Sprendimas. Akivaizdu, kad $3^2 > 2^3$. Tuomet $3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$, t. y. $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} > (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} > (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}}$. Iš čia seka, kad $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$.

Atsakymas: $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$.

3. Žr. IX klasės 3 uždavinį.

4. Žr. IX klasės 4 uždavinį.

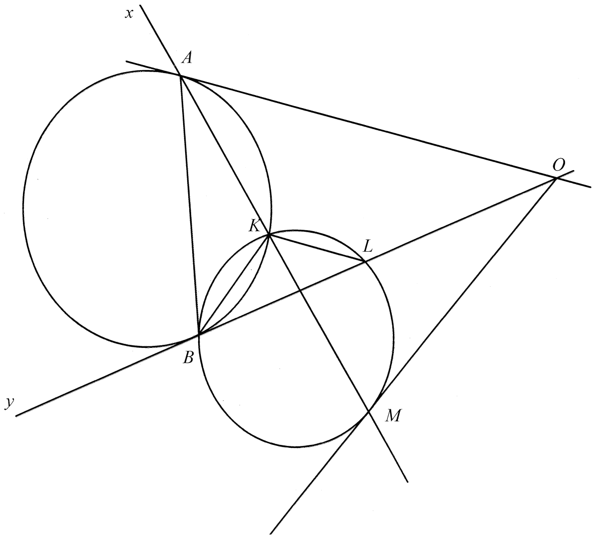
4 XI klasė

1. Žr. X klasės 2 uždavinį.

2. *Teigiamieji skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $x + y + z = 1$. Įrodykite, kad jiems teisinga nelygybė $\sqrt{xy+z} + \sqrt{yz+x} + \sqrt{zx+y} \geqslant 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.*

Sprendimas. Iš nelygybės, siejančios skaičių aritmetinį ir geometrinį vidurkius, gauname, kad $1 = x + y + z = 2 \cdot \frac{x+y}{2} + z \geqslant 2\sqrt{xy} + z$. Nelygybę dauginame iš z: $z \geqslant 2z\sqrt{xy} + z^2$. Pridedame prie abiejų pusių po xy: $xy + z \geqslant xy + 2z\sqrt{xy} + z^2$. Pastebime, kad nelygybės dešinėje pusėje yra pilnas kvadratas, todėl $\sqrt{xy+z} \geqslant \sqrt{xy} + z$. Sudedame tris analogiškas nelygybes $\sqrt{xy+z} \geqslant \sqrt{xy} + z$; $\sqrt{xz+y} \geqslant \sqrt{xz} + y$; $sqrtyz + x \geqslant \sqrt{yz} + x$, ir gauname ką ir reikėjo įrodyti.

3. *Kokią mažiausią reikšmę įgyja reiškinys $S = a + b + c + \frac{1}{abc}$, jei a, b ir c – teigiamieji skaičiai, kuriems teisinga lygybė $a^2 + b^2 + c^2 = 1$?*



2 pav.

Sprendimas. Pertvarkę reiškinį ir pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, turime: $S = a+b+c+\frac{1}{abc} = a+b+c+\frac{1}{9abc}+\frac{8}{9abc} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\cdot\frac{1}{9abc}}+\frac{8}{9abc} = \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{9abc}$. Kita vertus, $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, todėl $abc \leqslant \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3^3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Taigi $\frac{8}{9abc} \geqslant \frac{8\cdot3\sqrt{3}}{9} = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Todėl $S \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. Lygybė teisinga, kai $a=b=c=\frac{1}{9abc}$, t. y., kai $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Atsakymas: $4\sqrt{3}$, kai $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. *Apskritimas liečia kampo, kurio viršūnė yra taškas O, kraštines taškuose A ir B. Mažesniajame lanke AB pažymėtas taškas K. Sakykime, kad tiesės OB taškas L yra toks, kad tiesės OA ir KL yra lygiagrečios. Apskritimas, apibrėžtas apie trikampį KLB, kerta tiesę AK taškuose K ir M. Įrodykite, kad tiesė OM yra to apskritimo liestinė.*

Sprendimas. Akivaizdu, kad reikia įrodyti kampų OMK ir KBM lygybę (2 pav.). Iš tiesių KL ir OA lygiagretumo gauname, kad $\angle LKM = \angle OAK$. Pagal kampo tarp liestinės ir stygos savybę turime, kad $\angle LKM = \angle OAK = \angle KBA$. Pagal įbrėžtinių kampų savybes $\angle LKM = \angle LBM$. Kadangi $\angle OAM = \angle OBM$, tai keturkampis $OABM$ yra įbrėžtas į apskritimą, todėl $\angle OMA = \angle OBA$. Iš čia seka, kad $\angle OMK = \angle OMA = \angle OBA = \angle ABK + \angle OBK = \angle OBM + \angle OBK = \angle MBK$, ką ir reikėjo įrodyti.

5 XII klasė

1. *Raskite visus skirtingus pirminius skaičius p, q, r ir s, kad jų suma būtų pirminis skaičius, o skaičiai p^2+qs ir p^2+qr būtų natūraliųjų skaičių kvadratai.*

Sprendimas. Keturių nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius, todėl vienas iš ieškomųjų skaičių lygus 2. Įrodysime, kad $p=2$. Jei $p \neq 2$, tai kuris nors iš skaičių

q, r, s yra lygus 2, o likusieji yra nelyginiai. Jei $p = 2k + 1$, $q = 2$, o $r = 2l + 1$, tai $p^2 + qr = 4(k^2 + k + l) + 3$ negali būti natūraliojo skaičiaus kvadratas, nes nelyginio skaičiaus kvadrato liekana dalijant iš 4 lygi 1. Analogiškai gaunama ir atvejais $p = 2k + 1$, $s = 2$, $q = 2l + 1$, o taip pat $p = 2k + 1$, $r = 2$, $q = 2l + 1$. Taigi $p = 2$. Jei $4 + qs = a^2$, tai $qs = (a - 2)(a + 2)$. Jei $a - 2 = 1$, tai $a = 3$, $qs = 5$ – prieštara. Kadangi q ir s – pirminiai, $a - 2 \neq 1$, tai turi būti $q = a - 2$, $s = a + 2$, arba $q = a + 2$, $s = a - 2$. Abiem atvejais q ir s skirtumo modulis lygus 4. Analogiškai tarę, kad $4 + qr = b^2$, gauname, kad q ir r skirtumo modulis lygus 4. Taigi $s = q - 4$, $r = q + 4$, arba $s = q + 4$, $r = q - 4$. Iš skaičių $q - 4$, q ir $q + 4$ visada vienas dalijasi iš 3. Taigi $q - 4 = 3$, $q = 7$. Tada $s = 3$, $r = 11$, arba $s = 11$, $r = 3$.

Atsakymas: $p = 2$, $q = 7$, $s = 3$, $r = 11$;
$p = 2$, $q = 7$, $s = 11$, $r = 3$.

2. *Su visais natūraliaisiais skaičiais n, kuriems skaičius $37n + 1$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, skaičius $n + 37$ yra 38 natūraliųjų skaičių kvadratų suma.*

a) *Įrodykite šį teiginį.*

b) *Nurodykite bent vieną uždavinio sąlygą tenkinantį skaičių n.*

Sprendimas. a) Sakykime, kad skaičius $37n + 1$ yra natūraliojo skaičiaus m kvadratas: $37n + 1 = m^2$. Iš čia išplaukia, kad arba $m - 1$, arba $m + 1$ dalijasi iš 37. Jeigu $m - 1 = 37k$ $(k \geqslant 1)$, tai $37n + 1 = (37k + 1)^2$. Iš čia $n = 37k^2 + 2k$. Tuomet $n + 37 = 37k^2 + 2k + 37 = 36k^2 + (k + 1)^2 + 6^2$. Taigi skaičius $n + 37$ užrašomas 36 skaičių, lygių k^2, vieno skaičiaus, lygaus $(k + 1)^2$, ir vieno skaičiaus 6^2 suma. Jei $m+1 = 37k$ $(k \geqslant 1)$, analogiškai gauname: $n+37 = 36k^2 + (k-1)^2 + 6^2$. Jei $k \neq 1$, tai skaičius $n + 37$ užrašomas 38 natūraliųjų skaičių kvadratų suma, o jei $k = 1$, turime skaičių $n + 37 = 72 = 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 30 \cdot 1^2$.

b) Kai $m - 1 = 37 \cdot 1$, t. y., kai $m = 38$, tai $3n + 1 = 38^2$, t. y., $n = 39$. Kai $m - 1 = 37 \cdot 2$, t. y., kai $m = 75$, tai $3n + 1 = 75^2$, t. y., $n = 152$.

Atsakymas: pavyzdžiui, $n = 39$ arba $n = 152$.

Literatūra

[1] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mazėtis. 2012 metų vpu jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser B*, **53**:169–174, 2012.

[2] E. Jakaitytė, A. Kaučikas ir E. Mazėtis. 2013 metų vpu jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser B*, **54**:111–116, 2012.

[3] E. Jakaitytė ir E. Mazėtis. 2014 metų vpu jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser B*, **55**:34–38, 2014.

SUMMARY

Survey of LEU olympiad 2014 for young mathematicians
V. Gesevičienė, E. Mazėtis, E. Jakaitytė

The texts and solutions of the LEU young mathematicians olympiad – 2015 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.