LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
57 t., 2016, 43–48

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Kriterijų derinimas svorių balansavimo metodu taikant entropijų reikšmes sprendimo priemimo uždaviniui spręsti

Aleksandras Krylovas, Natalja Kosareva

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: aleksandras.krylovas@vgtu.lt, natalja.kosareva@vgtu.lt

Santrauka. Straipsnyje parodyta, kaip taikant modifikuotą KEMIRA metodą gali būti sprendžiami daugiakriteriniai optimizavimo uždaviniai, kai yra trys požymių grupės. Požymių prioritetai nustatomi apskaičiuojant entropijas, požymių svoriai randami sprendžiant optimizavimo uždavinį. Pasiūlytas metodas leidžia rasti vieną iš kelių galimų lokalių ekstremumų.

Raktiniai žodžiai: daugiakriteriniai sprendimo metodai, entropija, svorių balansavimas, KEMIRA metodas.

1 Matematinio uždavinio formulavimas

Straipsniuose [1, 2] autoriai pasiūlė svorių balansavimo metodą, leidžiantį spręsti daugiakriterinių vertinimų uždavinius, kai nagrinėjami objektai vertinami kelių rūšių požymiais, kurie nėra kiekybiškai suderinti tarpusavyje. Požymių prioritetams nustatyti buvo pasiūlyta Kemeny mediana. Straipsnyje [4] šis metodas buvo pavadintas KEMIRA (KEmeny Median Indicator Ranks Accordance). Daugiakriterinių vertinimų uždaviniai sprendžiami daugelyje sričių – personalo atrankoje, projektų valdyme, logistikoje ir pan. KEMIRA metodo taikymo galimybės gamyklos vietos parinkimo uždavinio sprendimui parodytos straipsnyje [3].

Iki šiol autoriai sprendė uždavinius, kuriuose požymius sudaro dvi logiškai paaiškinamos grupės, pavyzdžiui, objektyvūs ir subjektyvūs, vidiniai ir išoriniai požymiai. Šiame darbe parodyta, kaip KEMIRA taikomas daugiakriterinio optimizavimo uždaviniams spręsti, kai požymiai klasifikuojami į tris grupes.

Tarkime, kad turime N respondentų apklausos rezultatus X_i^j, Y_k^j, Z_l^j vertinant tam tikrus reiškinius pagal trijų grupių X, Y, Z požymius. Čia $i = 1, 2, \dots, n_x$, $k = 1, 2, \dots, n_y$, $l = 1, 2, \dots, n_z$, $j = 1, 2, \dots, N$. Laikome juos nepriklausomai matuojančiais tuos pačius reiškinius.

Remiantis šiais apklausos rezultatais, kurie reiškia respondentų atitikimą požymiams, ieškosime optimalių požymių svorių reikšmių. Tegu visi požymiai yra maksimizuojami (visų jų didesnė reikšmė yra geresnė), tad pradinius uždavinio duomenis pertvarkome tokiu normalizavimu:

$$x_i^j = \frac{X_i^j - \min_j X_i^j}{\max_j X_i^j - \min_j X_i^j}, \qquad y_k^j = \frac{Y_k^j - \min_j Y_k^j}{\max_j Y_k^j - \min_j Y_k^j}, \qquad z_l^j = \frac{Z_l^j - \min_j Z_l^j}{\max_j Z_l^j - \min_j Z_l^j}.$$

1 lentelė. Normuotų duomenų x_i^j fragmentas ir entropijos $\times 1000$.

j	$x_{i_1}^j$	$x_{i_2}^j$	$x_{i_3}^j$	$x_{i_4}^j$	$x_{i_5}^j$	$x_{i_6}^j$	$x_{i_7}^j$	$x_{i_8}^j$	$x_{i_9}^j$	$x_{i_{10}}^j$	$x_{i_{11}}^j$
1	.200	.700	.300	.0	.500	.777	.600	.500	.0	.900	1.
2	.800	.700	.500	.111	.300	.555	.100	.500	.0	1.	.900
3	.900	.600	.300	.777	.700	.111	1.	.125	.0	.500	.400
4	.500	.700	.400	.111	.600	.777	.0	.375	.100	.900	1.
5	1.	.600	.400	.666	.200	.444	.100	.375	.0	.800	.900
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
83	.500	.600	.200	.666	.400	.777	.300	.125	.0	.900	1.
84	.700	.500	.600	.111	.300	.777	.100	.500	.0	.900	1.
85	.600	.400	.300	.777	.200	.444	.0	.125	.900	.700	1.
86	.300	.700	.100	.555	.500	.777	.400	.0	.200	.900	1.
87	.700	.200	.400	.777	.100	.222	.500	.0	.600	.900	1.
E	497	491	485	484	480	467	457	453	409	388	376

Apskaičiuojame kiekvieno stulpelio x_i^j entropiją e_{xi}. Sudarome lentelę:

$\tilde{x}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\cdots$	$\tilde{x}_s$
$\tilde{p}$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$	$\cdots$	$\tilde{p}_s$

čia $\tilde{x}_t < \tilde{x}_{t+1}$ – didėjimo tvarka užrašytos x_i^j, $j = 1, 2, \ldots, N$ reikšmės, $\tilde{p}_t$ – jų dažniai: $\sum_{t=1}^s \tilde{p}_t = N$.

2 Entropijos

Pakeitę dažnius santykiniais dažniais, gauname diskrečiojo atsitiktinio dydžio empirinį tikimybinį skirstinį, kurio entropija apskaičiuojama standartiniu būdu:

$$e_{xi} = -\sum_{t=1}^{s} \frac{\tilde{p}_t}{N} \ln \frac{\tilde{p}_t}{N}.$$

Analogiškai apskaičiuojame e_{yk} ir e_{zl}. Suformuluosime uždavinį, kuriame $N = 87$, $n_x = n_y = n_z = 11$, t. y. yra 33 požymiai, pagal kuriuos bus vertinami 87 respondentai. 1-je lentelėje pateiktas normuotų duomenų fragmentas – skaičių $E = 1000e_{xi}$ sveikosios dalys ir skaičių x_i^j trupmeninės dalys.

Čia stulpeliai išdėstyti entropijų e_{x_i} mažėjimo tvarka. Pagal šias reikšmes nustatyti tokie požymių x_i^j, y_k^j, z_l^j prioritetai (didesnė požymio entropiją atitinka aukštesnį jo prioritetą):

$$i_1 \succ i_2 \succ \cdots \succ i_{11}, \qquad k_1 \succ k_2 \succ \cdots \succ k_{11}, \qquad l_1 \succ l_2 \succ \cdots \succ l_{11}. \tag{1}$$

Turėdami respondento duomenų vektorius (X, Y, Z), sukonstruokime požymių svertinius vidurkius:

$$W_x(X) = \sum_{s=1}^{11} w_{xi_s} x_{i_s} = w_{xi_1} x_{i_1} + w_{xi_2} x_{i_2} + \cdots + w_{xi_{11}} x_{i_{11}},$$

$$W_y(Y) = \sum_{s=1}^{11} w_{yi_s} y_{i_s} = w_{yk_1} y_{k_1} + w_{yk_2} y_{k_2} + \cdots + w_{yk_{11}} y_{k_{11}},$$

$$W_z(Z) = \sum_{s=1}^{11} w_{zi_s} z_{i_s} = w_{zl_1} z_{l_1} + w_{zl_2} z_{l_2} + \cdots + w_{zl_{11}} z_{l_{11}}, \tag{2}$$

kai svoriai w_x, w_y, w_z tenkina (2) reikalavimus:

$$\begin{aligned} w_{xi_1} &\geqslant w_{xi_2} \geqslant \cdots \geqslant w_{xi_{11}}, \\ w_{yk_1} &\geqslant w_{yk_2} \geqslant \cdots \geqslant w_{yk_{11}}, \\ w_{zl_1} &\geqslant w_{zl_2} \geqslant \cdots \geqslant w_{zl_{11}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pastebėkime, kad vienas iš dalykinių tyrimo klausimų yra radimas svorių, tenkinančių (2) reikalavimus. Tai rodo vertinimo kriterijų santykinius svarbumus. Ankstesniuose autorių darbuose [1, 4] požymių prioritetai (1) buvo gaunami iš ekspertinių įverčių skaičiuojant Kemeny medianas. Šiame straipsnyje nagrinėjamas atvejis, kai turime tik matavimo rezultatus ir prioritetai (1) nustatomi iš matavimo rezultatų entropijų, rodančių šių rezultatų informatyvumą.

3 Optimizavimo uždaviniai

Kadangi visi požymiai yra maksimizuojami, kuo geriau respondentas tenkina atitinkamus reikalavimus, tuo didesnes reikšmes įgyja funkcijos $W_x(X)$, $W_y(Y)$, $W_z(Z)$. Pasirinkime skaičius $w^x, w^y, w^z \in (0;1)$ ir apibrėžkime aibes $A^x_{w^x}$, $A^y_{w^y}$, $A^z_{w^z}$, kurios sudarytos iš tų respondentų $j \in J \equiv \{1, 2, \ldots, N\}$, kuriems (2) svertinių kriterijų reikšmės yra nemažesnės nei pasirinkti lygmenys w^x, w^y, w^z, t. y. jos yra „geriausiųjų“ aibės:

$$\begin{aligned} A^x_{w^x} &= \bigl\{ j \in \{1, 2, \ldots, N\} : W_x(X^j) \geqslant w^x \bigr\}, \\ A^y_{w^y} &= \bigl\{ j \in \{1, 2, \ldots, N\} : W_y(Y^j) \geqslant w^y \bigr\}, \\ A^z_{w^z} &= \bigl\{ j \in \{1, 2, \ldots, N\} : W_z(Z^j) \geqslant w^z \bigr\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Svoriai w_{xi}, w_{yk}, w_{zl} turi būti parinkti taip, kad svertiniai kriterijai būtų kuo geriau suderinti tarpusavyje. Matematiškai šį suderinamumą išmatuojame taip. Tarkime, kad iš tam tikrų samprotavimų parinkti $w^x, w^y, w^z \in (0, 1)$ – skaičiai, nurodantys mažiausias svertinių kriterijų reikšmes. Sudarome dar dvi aibes

$$A = A^x_{w^x} \cap A^y_{w^y} \cap A^z_{w^z}, \qquad B = \bigl(A^x_{w^x} \cup A^y_{w^y} \cup A^z_{w^z} \bigr) \setminus A. \tag{5}$$

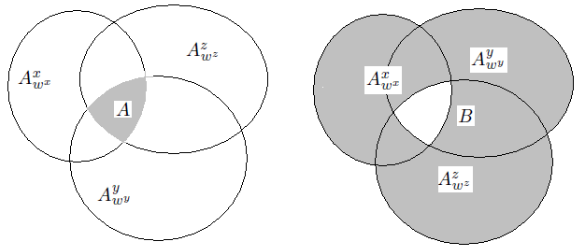
Aibė A – tenkinantys visus tris kriterijus $W_{x,y,z}(X^j, Y^j, Z^j) \geqslant w^x, w^y, w^z$ testuojamieji $j \in J$, aibė B – tenkinantys bent vieną iš jų, bet ne visus.

Pažymėkime $nA = |A|$ ir $nB = |B|$ aibių elementų skaičius. Taigi siūlomas toks matematinis „geriausio“ kriterijų suderinamumo apibrėžimas:

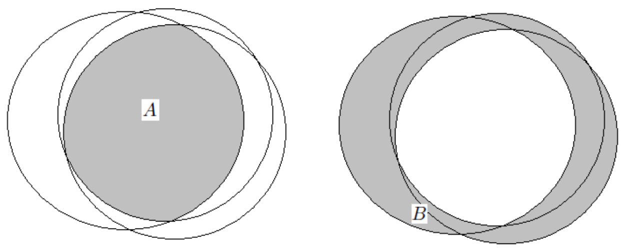
$$\max_{w_{xi}, w_{yk}, w_{zl}} nA. \tag{6}$$

Svoriai w_{xi}, w_{yk}, w_{zl} turi tenkinti (2) apribojimus ir parenkami taip, kad būtų analizuojami tik turintys aukštas (2) kriterijų reišmes testuojamieji, pavyzdžiui, 20–30% „geriausių“. Kai yra galimybė rinktis iš kelių tenkinančių (6) sąlygą alternatyvų, kartu su ja nagrinėjama dar viena tikslo funkcija:

$$\min_{w_{xi}, w_{yk}, w_{zl}} nB. \tag{7}$$



1 pav. Aibių A ir B grafinis vaizdavimas.



2 pav. Aibės A maksimizavimas ir aibės B minimizavimas.

T. y., maksimizuojame aibę, sudarytą iš geriausių elementų ir minimizuojame aibę, sudarytą iš abejotinų elementų. Grafiškai aibės A ir B pavaizduotos 1-jame paveiksle. 2-jame paveiksle matome, kaip maksimizuojama aibė A ir minimizuojama aibė B.

4 Svorių balansavimo metodo algoritmas

Šiame darbe buvo atlikti skaičiavimai realizuojantys tokį algoritmą:

1. Nustatomi algoritmo parametrai:

$$\max_{iter} = 10^6, \qquad \varepsilon = 0.1, \qquad w^{x,y,z} = 0.3 \text{ (ieškome 30\% geriausių)}.$$

2. Pasirenkamas pradinis svorių vektorius

$$w^0 = \left(w^0_{x1}, w^0_{x2}, \ldots, w^0_{xn_x}; w^0_{y1}, w^0_{y2}, \ldots, w^0_{yn_y}; w^0_{z1}, w^0_{z2}, \ldots, w^0_{zn_z}\right),$$

   tenkinantis (2) apribojimus.

3. Surandama (5) aibė A^0 ir apskaičiuojamas jos elementų skaičius nA^0.

4. Atsitiktinai pasirenkamas krypties vektorius

$$\Delta w = (\Delta w_{x1}, \ldots, \Delta w_{xn_x}; \Delta w_{y1}, \ldots, \Delta w_{yn_y}; \Delta w_{z1}, \ldots, \Delta w_{zn_z}).$$

5. Apskaičiuojamas vektorius $w^1 = w^0 + \varepsilon\Delta w$. Jei jis netenkina (2) apribojimų, atliekama jo korekcija.

2 lentelė. Geriausio eksperimento rezultatai.

w	Pradiniai svoriai w^0
w^x	0.0951; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905; 0.0905
w^y	0.1696; 0.1330; 0.1330; 0.0961; 0.0961; 0.0961; 0.0926; 0.0926; 0.0906; 0.0000; 0.0000
w^z	0.1463; 0.1463; 0.0987; 0.0866; 0.0866; 0.0866; 0.0866; 0.0866; 0.0866; 0.0866; 0.0025
w	Apskaičiuoti svoriai w^1
w^x	0.0947; 0.0934; 0.0934; 0.0901; 0.0901; 0.0901; 0.0901; 0.0901; 0.0893; 0.0893; 0.0893
w^y	0.1617; 0.1342; 0.1328; 0.0978; 0.0978; 0.0967; 0.0923; 0.0923; 0.0923; 0.0020; 0.0000
w^z	0.1436; 0.1430; 0.0977; 0.0873; 0.0873; 0.0873; 0.0873; 0.0873; 0.0873; 0.0873; 0.0047

A	nA	nB
{12; 13; 23; 38; 40; 43; 45; 50; 52; 65; 71}	11	43

6. Jei $iter > \max_{iter}$ – algortmas baigia skaičiavimus.

7. Surandama (5) aibė A^1 ir apskaičiuojamas jos elementų skaičius nA^1.

8. Jei $nA^1 > nA^0$, keičiame $w^0 = w^1$, $A^0 = A^1$ ir pereiname prie algoritmo punkto 4, jei $nA^1 \leqslant nA^0$, tiesiog pereiname prie 4 punkto.

5 Skaičiavimo eksperimentų rezultatai

Pateiksime „geriausio“ eksperimento rezultatus parenkant skirtingus pradinius svorius w_0, kai svertinių koeficientų radimo algoritmas buvo realizuotas maksimizuojant aibės A elementų skaičių nA ir minimizuojant aibės B elementų skaičių nB, t. y. sprendžiant optimizavimo uždavinius (6) ir (7).

Esant $w^{x,y,z} = 0.3$, gavome $|nA| = 11$, $|nB| = 43$.

Įstatykime gautas svorių reikšmes ir apskaičiuokime svertines sumas:

$$W_x(X) = \frac{1}{100}\big(10x_1 + 9(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11})\big), \quad (8)$$

$$W_y(Y) = \frac{1}{100}\big(16y_1 + 13(y_2 + y_3) + 10(y_4 + y_5 + y_6) + 9(y_7 + y_8 + y_9) + y_{10}\big), \quad (9)$$

$$W_z(Z) = \frac{1}{100}\big(14(z_1 + z_2) + 10z_3 + 9(z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9) + 8z_{10}\big). \quad (10)$$

Koeficientus formulėse (8) parenkame suapvalinę pradines reikšmes ir turėdami omeny, kad koeficientai turi tenkinti sąlygą $w_1 + w_2 + \cdots + w_{11} = 1$. Toliau daugiakriterinis uždavinys galėtų būti sprendžiamas ranguojant respondentus pagal tikslo funkcijos $W_x + W_y + W_z$ reikšmes. Geriausią respondentą atitiks didžiausia tikslo funkcijos reikšmė.

6 Išvados

Rezultatas, gautas sprendžiant optimizavimo uždavinį, gali būti tik vienas iš galimų lokaliųjų ekstremumų. Aibės A dydį galima keisti parenkant skirtingas dydžių

w^x, w^y, w^z reikšmes – slenksčius. Straipsnyje pasiūlytas daugiakriterinių optimizavimo uždavinių sprendimo metodas, kai požymių aibė sudaryta iš trijų poaibių. Požymių prioritetai nustatomi taikant entropijas, požymių svorių radimui sprendžiami optimizavimo uždaviniai (6) ir (7).

Literatūra

[1] S. Dadelo, A. Krylovas, N. Kosareva, E.K. Zavadskas and R. Dadelienė. Algorithm of maximizing the set of common solutions for several MCDM problems and it's application for security personnel scheduling. *Int. J. Comp. Comm. Contr.*, **9**(4):140–148, 2014.

[2] A. Krylovas and N. Kosareva. Kriterijų svorių balansavimas taikant Kemeny medianą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **55**:50–54, 2014.

[3] A. Krylovas and N. Kosareva. Gamyklos vietos parinkimo uždavinio sprendimas daugiakriteriniu KEMIRA metodu. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **56**:18–23, 2015.

[4] A. Krylovas, E.K. Zavadskas, N. Kosareva and S. Dadelo. New KEMIRA method for determining criteria priority and weights in solving MCDM problem. *Int. J. Info. Tech. Dec. Mak.*, **13**(6):1119–1133, 2014.

SUMMARY

Weights balancing method using entropy values in solving MCDM problem

A. Krylovas, N. Kosareva

The article shows how multiple criteria optimization problems could be solved by application of modified KEMIRA method, when there are three groups of criteria. Criteria priorities are determined by the entropy, criteria weights are calculated by solving optimization task. The proposed method allows to find one of several possible local extrema.

Keywords: multiple criteria decision making, entropy, weights balancing, KEMIRA method.