LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
**58** t., 2017, 33–38

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

# Stačiųjų trikampių egzistavimo ir vienaties problema

**Jevgenijus Kirjackis[1], Edmundas Mazėtis[2,3], Grigorijus Melničenko[3]**

[1] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

[2] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius

[3] *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius, Lietuva

E. paštas: jk@vgtu.lt, gmelnicenko@gmail.com, edmundas.mazetis@leu.lt

**Santrauka.** Straipsnyje gautos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad egzistuotų vienintelis statusis trikampis, kai duota jo pusiaukraštinė ir pusiaukampinė.

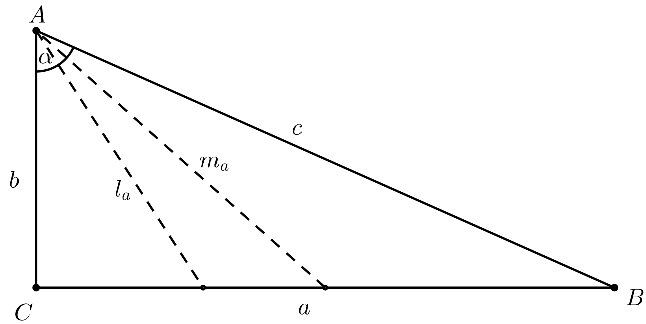
**Raktiniai žodžiai:** statusis trikampis, pusiaukraštinė, pusiaukampinė, kubinė lygtis.

## Įvadas

Trikampio egzistavimo įrodymas, kai žinomi jo elementai, dažnai yra sunkus uždavinys. Pavyzdžiui, trikampio egzistavimo problema, kai duotos trys jo pusiaukampinės, turi ilgą istoriją. Pirmasis šį uždavinį mokslinėje spaudoje suformulavo ir bandė jį spręsti prancūzų matematikas Anri Brokaras 1875 metais [6, 3]. Tik 1994 metais buvo paskelbtas uždavinio sprendimas [6], kuris remiasi Brauerio teoremos apie invariantinį tašką taikymu. Šio straipsnio autoriai, siekdami trikampio egzistavimo problemą išdėstyti elementariosios matematikos priemonėmis, apsiriboja stačiojo trikampio egzistavimo įrodymu, kai yra žinomos jo pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, t. y., sprendžiamas trikampio egzistavimo klausimas, kai duoti trys jo elementai – $90^\circ$ kampas, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė.

Stačiojo trikampio egzistavimo, kai duota pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, problemą išskaidysime į tris uždavinius: 1) kada statusis trikampis apibrėžiamas šiais elementais (t. y., ar egzistuoja bent vienas uždavinio sprendinys), 2) jei uždavinio sprendinys egzistuoja, tai ar jis vienintelis (t. y., ar trikampis vienareikšmiškai nustatomas šiais elementais) ir 3) ar galima trikampį, jei jis egzistuoja, nubrėžti skriestuvu ir liniuote.

Pastebėkime, kad tokie tyrinėjimai gali būti matematika besidominčių mokinių kūrybinių ar projektinių darbų dalis.




**1 pav.**

## 1 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai žinoma pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, nubrėžtos iš vienos viršūnės

**1 teorema.** *Sakykime, kad $l_a$ ir $m_a$ – dvi duotos atkarpos. Statusis trikampis ABC kuriame pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, išeinančios iš viršūnės A, yra lygios duotosioms atkarpoms $l_a$ ir $m_a$ (1 pav.) egzistuoja tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė $m_a > l_a$. Be to, toks statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai ir bendruoju atveju jo negalima nubrėžti skriestuvu ir liniuote.*

*Įrodymas.* Visų pirma įrodysime sąlygos $m_a > l_a$ pakankamumą. Darbe [4] įrodyta, kad stačiojo trikampio smailiojo kampo $\alpha$ kosinusas $x = \cos\alpha$ yra lygties

$$3x^3 - kx^2 + x + 1 = 0 \tag{1}$$

sprendinys, čia $k = (8m_a^2 - 3l_a^2)/{l_a}^2$.

Išnagrinėkime funkciją $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x + 1$. Kadangi $m_a > l_a$, tai $k > 5$. Akivaizdu, kad $f(1) = 5 - k < 0$, o $f(0) = 1 > 0$, todėl iš teoremos apie tolydžiosios funkcijos nulius išplaukia, kad (1) lygtis turi bent vieną sprendinį intervale $0 < x_1 < 1$. Taigi egzistuoja kampo $\alpha$ reikšmė, esanti intervale $0 < \alpha < 90°$ tokia, kad $x_1 = \cos\alpha$. Žinodami smailųjį kampą $\angle A = \alpha$, skriestuvu ir liniuote atliekame tokias konstrukcijas: nubraižome kampą $\angle A$, nubrėžiame jo pusiaukampinę, joje atidedame atkarpą $AL = l_a$; iš taško $L$ į vieną iš kampo kraštinių nuleidžiame statmenį $LC$ ir pratęsiame jį iki susikirtimo su kita kampo kraštine taške $B$. Gavome trikampį $ABC$ (1 pav.), kurio $\angle C = 90°$, smailusis kampas $\angle A = \alpha$, o iš jo viršūnės išeinanti pusiaukampinė lygi $l_a$. Sakykime, kad $\bar{m}_a$ nubrėžtojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės $A$, o $\bar{k} = (8\bar{m}_a^2 - 3l_a^2)/{l_a}^2$. Pagal [4] straipsnio 2 teoremą reiškinys $x = \cos\alpha$ tenkina lygtį

$$3x^3 - \bar{k}x^2 + x + 1 = 0 \tag{2}$$

Atėmę (1) lygtį iš (2) lygties randame, kad $\bar{k} = k$. Tuomet $\bar{m}_a = m_a$, taigi stačiojo trikampio $\Delta ABC$ egzistavimas, kai duota $l_a$ ir $m_a$, o $m_a > l_a$ įrodytas.

Sąlygos $m_a > l_a$ būtinumas išplaukia iš to, kad ši nelygybė yra teisinga bet kuriam nelygiašoniam trikampiui Tikrai, jei iš bet kurio trikampio $ABC$ viršūnės $A$ nubrėžtos aukštinė $AH$, pusiaukampinė $AD$ ir pusiaukraštinė $AM$, tai taškas $D$ yra atkarpoje

$HM$, taigi $AH < AD < AM$. Šią nelygybę galima įrodyti ir algebriniu būdu, nes trikampio pusiaukraštinei ir pusiaukampinei teisingos lygybės

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2, \qquad l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}.$$

Iš trikampio nelygybės gauname, kad $a/(b+c) < 1$, taigi

$$m_a^2 - l_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 - \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 - bc + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$
$$= \frac{1}{2}(b-c)^2 - \frac{1}{4}\frac{a^2}{(b+c)^2}\big[(b+c)^2 - 4bc\big] = \frac{1}{4}(b-c)^2\left[2 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right] > 0.$$

Iš čia išplaukia, kad nelygybė $m_a > l_a$ teisinga bet kuriam nelygiašoniam trikampiui.

Įrodysime tokio stačiojo trikampio vienatį. Kai $k > 5$ turime, kad $f(-1) = -1 - k < 0$, o $f(0) = 1 > 0$. Pagal teoremą apie tolydžios funkcijos nulius, (1) lygtis turi antrąjį sprendinį $-1 < x_2 < 0$. Jei $x_3$ – trečiasis (1) lygties sprendinys, tai pagal Vijeto teoremą turime $1/3 = -x_1x_2x_3$. Kadangi $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, tai $x_3 > 0$. Iš lygybės $f'(x) = 9x^3 - 2kx^2 + 1$ išplaukia, kad funkcija $f(x)$ įgyja maksimumą taške $x_{\max} = (k - \sqrt{k^2 - 9})/9$, (be to, $f(x_{\max}) > 0$ ) ir minimumą taške $x_{\min} = (k + \sqrt{k^2 - 9})/9$, (be to, $f(x_{\min}) < 0$). Kadangi $k > 5$, tai nesunkiai gauname, kad $x_{\min} > 1$. Taigi funkcija $f(x)$ yra didėjanti intervale $(x_{\min}, +\infty)$ ir kerta $Ox$ ašį intervalo $(1, +\infty)$ taške, t. y., $x_3 > 1$. Todėl intervale $(0, 1)$ (1) lygtis turi vienintelį sprendinį $x_1 = \cos\alpha$, kuris nustato vienintelį smailųjį kampą $\angle A = \alpha$. Taigi statinis $b = l_a \cos(\alpha/2)$ nustatomas vienareikšmiškai, todėl ir statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai.

Kad statusis trikampis, kurio žinoma pusiaukraštinė ir pusiaukampinė, nubrėžtos iš vienos smailiojo kampo viršūnės, nenubraižomas skriestuvu ir liniuote, įrodyta [4] darbe.

## 2 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai žinoma pusiaukraštinė ir pusiaukampinė, nubrėžtos iš skirtingų viršūnių

**2 teorema.** *Sakykime, kad $l_a$ ir $m_a$ – duotosios atkarpos. Statusis trikampis $ABC$ (2 pav.), kurio pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės $A$, lygi $l_a$, o pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės $B$ lygi $m_b$, egzistuoja tada ir tik tada, kai $2m_b > l_a$. Toks statusis trikampis yra vienintelis ir bendru atveju nenubraižomas skriestuvu ir liniuote.*

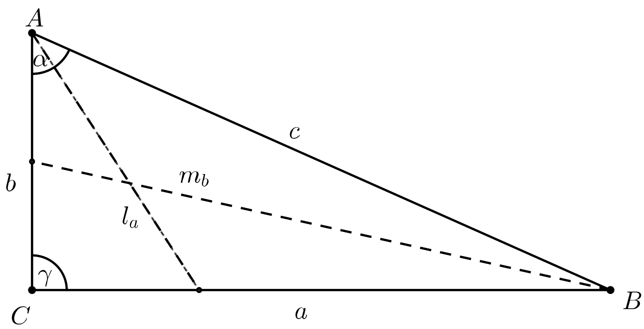
*Įrodymas.* Sąlygos $2m_b > l_a$ būtinumas ir pakankamumas yra įrodyti [5] darbe. Pastebėkime, kad sąlyga $2m_b > l_a$ yra teisinga stačiajame trikampyje, bet kuriam trikampiui gali būti neteisinga. Skaitytojui patariame sukonstruoti atitinkamą pavyzdį.

Įrodysime stačiojo trikampio, tenkinančio nurodytas sąlygas, vienatį. [5] straipsnyje įrodyta, kad stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusas $x = \cos\alpha$ yra lygties

$$3x^3 + kx^2 - 4x - 4 = 0 \tag{3}$$

sprendinys, čia $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/{l_a}^2$.

Nagrinėkime funkciją $f(x) = 3x^3 + kx^2 - 4x - 4$. Kadangi $2m_b > l_a$, tai $k > 5$, todėl $f(1) = k - 5 > 0$. Iš teoremos apie tolydžiosios funkcijos nulius gauname, kad (3) lygtis




**2 pav.**

turi bent vieną sprendinį $0 < x_1 < 1$, t. y., $x_1 = \cos\alpha$. Taigi gauname smailųjį kampą $\angle A = \alpha$, tuomet konstruojame statųjį trikampį su duotosiomis atkarpomis $l_a$ ir $m_a$ (smulkiau galima rasti [5]). Kadangi $k > 5$, tai $f(-1) = -3 + k$. Kadangi $f(0) = -4 < 0$, tai iš teoremos apie tolydžiosios funkcijos nulius išplaukia, kad (3) lygtis turi antrąjį sprendinį $-1 < x_2 < 0$. Sakykime, kad trečiasis (3) lygties sprendinys yra $x_3$, todėl pagal Vijeto teoremą $-4/3 = -x_1x_2x_3$. Iš čia gauname, kad $x_3 < 0$, nes $x_1 > 0$ ir $x_2 < 0$. Taigi intervale $(0, 1)$ (3) lygtis turi tik vieną sprendinį $x_1 = \cos\alpha$, apibrėžiantį vienintelį stačiojo trikampio smailųjį kampą $\angle A = \alpha$.Todėl statinis $b = l_a \cos(\alpha/2)$ surandamas vienareikšmiškai, taigi ir statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai.

Bendruoju atveju stačiojo trikampio, kai duota pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, nubrėžtos iš skirtingų smailiųjų kampų viršūnių, nubrėžti skriestuvu ir liniuote negalima, tai įrodyta [5] darbe.

## 3 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai žinoma smailiojo kampo pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės

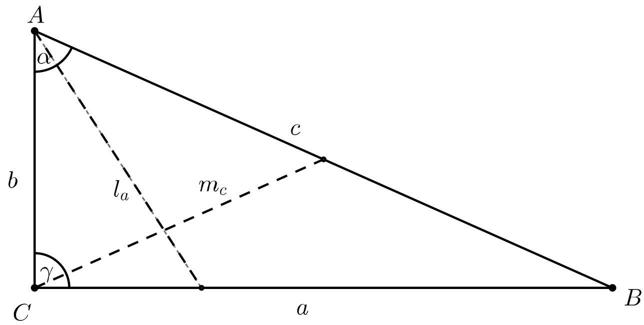
**3 teorema.** *Sakykime, kad $l_a$ ir $m_c$ – dvi duotosios atkarpos. Statusis trikampis, kuriame smailiojo kampo $A$ pusiaukampinė lygi $l_a$, o iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė lygi $m_c$ (3 pav.) egzistuoja tada ir tik tada, kai $2m_c > l_a$. Toks statusis trikampis yra vienintelis ir jis nubraižomas skriestuvu ir liniuote.*

*Įrodymas.* Sakykime, kad stačiojo trikampio $ABC$ smailiojo kampo $A$ pusiaukampinė lygi $l_a$, o iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė lygi $m_c$. Tada $c = 2m_c$,

$$b = l_a \cos\frac{\alpha}{2} = l_a\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = l_a\sqrt{\frac{b+c}{2c}} = l_a\sqrt{\frac{b+2m_c}{4m_c}}. \tag{4}$$

Taigi statinio $b$ ilgis yra kvadratinės lygties $4m_cb^2 - l_a^2b - 2m_cl_a^2 = 0$ sprendinys. Kadangi šios lygties diskriminantas $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{l_a^4 + 32m_c^2l_a^2} > l_a^2$, tai ši lygtis turi vieną teigiamą sprendinį Taigi statinio $b$ ilgis lygus

$$b = \frac{l_a^2 + l_a\sqrt{l_a^2 + 32m_c^2}}{8m_c}. \tag{5}$$




**3 pav.**

Dabar beliko nubrėžti statųjį trikampį, kai duota jo įžambinė ir statinis. Iš Pitagoro teoremos turime, kad

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4m_c^2 - b^2}. \tag{6}$$

Iš (5) ir (6) lygybių išplaukia sąlygos $2m_c > l_a$ pakankamumas. Iš (6) lygybės gauname nelygybę $2m_c - b > 0$, o, atsižvelgę į (5) lygybę, iš čia gauname, kad ši nelygybė teisinga tik kai $2m_c > l_a$. Skriestuvu ir liniuote braižome atkarpą $\sqrt{l_a^2 + 32m_c^2}$ (žr. [1], p. 120–123; [2], p. 146–148), po to brėžiame atkarpą $b$, tenkinančią (5) lygybę, o galiausiai nubraižome statųjį trikampį, kai duota statinis $b$ ir įžambinė $c = 2m_c$. Iš čia išplaukia, kad iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė lygi $m_c$, o iš (4) ir (5) lygybių gauname, kad kampo $A$ pusiaukampinė lygi $l_a$. Taigi nubrėžtas trikampis tenkina teoremos sąlygas.

Sąlygos $2m_c > l_a$, būtinumas išplaukia iš nelygybės $\cos(\alpha/2) > \cos\alpha$ ir lygybių $\cos\alpha = b/2m_c$ ir $\cos(\alpha/2) = b/l_a$.

Kadangi trikampio statiniai $a$ ir $b$ (5) ir (6) lygybėmis nustatomi vienareikšmiškai, tai pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį egzistuoja vienintelis statusis trikampis, tenkinantis teoremos sąlygas.

## 4 Baigiamosios pastabos

Nagrinėjant stačiojo trikampio egzistavimo ir vienaties, kai duota stačiojo trikampio pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, uždavinį, dar liko ištirti šiuos atvejus: 1) kai duota stačiojo kampo pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, nubrėžta iš smailiojo kampo viršūnės ir 2) pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės. Šie uždaviniai bus nagrinėjami kituose straipsniuose. Be to, 1 ir 2 teoremų įrodymai yra algebriniai, todėl natūralu rasti šių teoremų geometrinius įrodymus. Be to, įdomu būtų gauti būtinas ir pakankamas sąlygas, kurias turi tenkinti bet kurio trikampio pusiaukraštinė ir pusiaukampinė, t. y., kai $\angle C \neq 90°$.

## Literatūra

[1] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods.* Oxford University Press, Oxford, 2nd edition, 1996.

[2] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods* (in Russian). Moskva, MCNMO, 2001.

[3] G. Dinca and J. Mawhin. A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Bull. Belgian Math. Soc. – Simon Stevin*, **17**(2):333–341, 2010.

[4] J. Kirjackis, E. Mazėtis and G. Melničenko. Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **56**:70–74, 2015.

[5] J. Kirjackis, E. Mazėtis and G. Melničenko. Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą ii. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B.*, **57**:89–93, 2016.

[6] P. Mironescu and L. Panaitopol. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Amer. Math. Monthly*, **101**(1):58–60, 1994.

SUMMARY

**On the problem of the existence and uniqueness of right triangles**

*J. Kirjackis, G. Melnichenko, E. Mazėtis*

In the article necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of a right triangle with given bisector and median are established.

*Keywords*: Right triangle, median, bisector, cubic equation.