LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 63–67 www.mii.lt/LMR/

Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvių su specialiomis metrikomis struktūros

Edmundas Mazėtis

Vilniaus pedagoginis universitetas
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius
E. paštas: edmundas@vpu.lt

Santrauka. Nagrinėjamos metrinių hiperplokštuminių elementų erdvės, kurios yra Kartano erdvių apibendrinimas. Tai koliestinės erdvės, kurios normalizuojamos simetrinio metrinio tenzoriaus pagalba. Tiriama specialaus pavidalo metrika, apibrėžta [5] darbe. Įrodyta, kad tokiose erdvėse egzistuoja vidinės antikvaternioninių struktūrų šeimos, priklausančios nuo 3 parametrų, sukonstruotos su tokiomis struktūromis asocijuotos afiniosios sietys.

Raktiniai žodžiai: koliestinės sluoksniuotės, metrinių hiperplokštuminių elementų erdvės, tiesinės ir afiniosios sietys, antikvaternioninės struktūros, asocijuotos sietys.

1 Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvės

Sakykime, kad (M^n, α) – Rymano erdvė, T^*M^n – jos koliestinė sluoksniuotė. Bet kuriam lokaliajam erdvės M^n žemėlapiui $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ indukuojamas koliestinės sluoksniuotės T^*M^n žemėlapis $(\pi^{-1}(U), x^1, x^2, \ldots, x^n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$; čia $\pi : T^*M^n \to M^n$ yra projekcija ir y_i apibrėžiamas lygybe $p = y_i\, dx^i|_{\pi(p)}$ bet kuriam vektoriui $p \in \pi^{-1}(U)$. Jei $\alpha_{ij}(x^k)$ – Rymano erdvės M^n metrinis tenzorius, tai apibrėžiamas energijos tankis (žr. [5]):

$$t = \frac{1}{2}\alpha^{ij} y_i y_k, \tag{1}$$

čia α^{ik} yra tenzoriui α_{ij} atvirkštinis tenzorius. Apibrėžkime koliestinės sluoksniuotės T^*M^n metrinį tenzorių g_{ij}:

$$g_{ij} = \alpha(t)\alpha_{ij} + \beta(t) y_i y_j, \tag{2}$$

čia $\alpha(t) \neq 0$, o $\beta(t)$ – bet kurios energijos tankio $t > 0$ glodžios funkcijos [5]. Jei $y^i = \alpha^{ik} y_k$, tai atvirkštiniam tenzoriui g^{ij}, kai $\alpha(t) + 2t\beta(t) \neq 0$, turime:

$$g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{\alpha(t)} - \frac{\beta(t) y^i y^j}{\alpha(t)(\alpha(t) + 2t\beta(t))}. \tag{3}$$

Koliestinėse sluoksniuotėse T^*M^n apibrėžiama metrinių hiperplokštuminių elementų erdvių struktūra, jei su bet kuriuo realiuoju $\alpha > 0$ teisinga homogeniškumo sąlyga [2]:

$$g^{ij}\big(x^k, \lambda y_h\big) = g^{ij}\big(x^k, y_h\big). \tag{4}$$

Jei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial^i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, tai Kartano tenzoriui $C^{ijk} = \frac{1}{2}\partial^k g^{ij}$ teisingos lygybės

$$C^{ijk} y_k = 0. \tag{5}$$

Iš (1) lygybės ir tapatybių

$$\partial^i t = y^i, \qquad \partial^i y_j = \delta^i_j, \qquad \partial^i y^j = \alpha^{ij}, \qquad y_i y^i = 2t \tag{6}$$

seka, kad

$$\partial^k g_{ij} = \alpha^{'}_t y^k \alpha_{ij} + \beta^{'}_t y^k y_i y_j + \beta\big(\delta^k_i y_j + \delta^k_j y_i\big). \tag{7}$$

Pastebime, kad (5) lygybė ekvivalenti tapatybei $\partial^k g_{ij} y_k = 0$. Iš (6) ir (7) lygybių išplaukia, kad

$$\partial^k g_{ij} y_k = 2\alpha^{'}_t t\alpha_{ij} + 2t\beta^{'}_t y_i y_j + 2\beta y_i y_j. \tag{8}$$

Atsižvelgdami į (5) išraišką, iš čia gauname, kad

$$\alpha'_t = 0, \qquad t\beta'_t + \beta = 0, \tag{9}$$

arba

$$\alpha(t) = \text{const}, \qquad \beta(t) = \frac{c}{t}, \qquad c = \text{const}. \tag{10}$$

Taigi metrinių hiperplokštuminių elementų erdvių metrinio tenzoriaus komponentėms turime

$$g_{ij}\alpha\alpha_{ij} + \frac{c}{t} y_i y_j, \qquad g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{\alpha} - \frac{c y^i y^j}{\alpha t(\alpha + 2c)}, \tag{11}$$

čia $\alpha \neq 0$, $\alpha = \text{const}$, $c = \text{const}$, $\alpha \neq -2c$.

Hiperplokštuminių elementų erdvės afinioji sietis ∇ apibrėžiama invariantiniu liečiamosios erdvės išskaidymu į poerdvių tiesioginę sumą (žr. [1]):

$$TT^*M^n = T^{*\nu}M^n \oplus T^{*h}M^n. \tag{12}$$

Jei (x^k, y_h) – erdvės T^*M^n lokaliosios koordinatės, tai vektoriniai laukai $\{\partial^k\}$ yra poerdvio $T^{*\nu}M^n$ bazė, o vektoriniai laukai $\{\delta_k\}$ yra poerdvio $T^{*h}M^n$ bazė, jei

$$\delta_k = \partial_k + L_{kh}\partial^h, \qquad L_{kh} = y_p \Gamma^p_{kh}, \tag{13}$$

o Γ^p_{kh} yra metrinio tenzoriaus g Christoffelio simboliai. Iš (11) lygybės turime

$$\partial_k g_{ij} = \alpha\partial_k\alpha_{ij} - \frac{c}{2t^2}\partial_k\alpha^{pq} y_p y_q y_i y_j. \tag{14}$$

Atlikę veiskmus, iš (11) ir (14) lygybių gauname

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\alpha^{kh}(\partial_j\alpha_{ih} + \partial_i\alpha_{hj} - \partial_h\alpha_{ij}). \tag{15}$$

Iš čia išplaukia, kad $[\delta_p, \delta_q] = R_{jpq}\partial^j$, čia $R_{jpq} = 2\partial_{[p}L_{q]j}$ – sieties ∇ kreivumo tenzorius. Be to, erdvės M^n Rymano metrikos α kreivumo tenzoriui R^k_{jpq} teisinga lygybė

$$R_{jpq} = y_k R^k_{jpq}. \tag{16}$$

Kadangi $\delta_i t = 0$, iš (6) ir (11) lygybių gauname, kad

$$C^{kij} = \frac{c}{2\alpha t^2(\alpha + 2c)}\big(y^k y^i y^j - ct\big(\alpha^{ik} y^j + \alpha^{kj} y^i\big)\big) \tag{17}$$

ir

$$\nabla_h C^{kij} = 0. \tag{18}$$

Kaip žinome [6], metrinių hiperplokštuminių elementų erdvė yra vadinama erdve su absoliučiuoju paralelizmu, jei jos tiesinė sietis yra plokščioji. Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvė yra Landsbergo erdvės analogas, jei yra teisinga lygybė

$$y_k \nabla_h C^{kij} = 0. \tag{19}$$

Iš (16) ir (18) lygybių seka, kad teisinga:

1 teorema. *Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvė, kurios metrika apibrėžiama* (11) *lygybėmis, yra erdvė su absoliučiuoju paralelizmu tada ir tik tada, kai bazinės erdvės M^n metrinio tenzoriaus α_{ij} kreivumo tenzorius R^i_{jpq} lygus nuliui. Metrinė hiperplokštuminių elementų erdvė su* (11) *metrika yra Landsbergo erdvės analogas.*

2 Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvių atikvaternioninės struktūros

Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvių atikvaternioninę struktūrą (hiperbolinio tipo kvaternioninę struktūrą) apibrėžia sutvarkytas tenzorinių laukų trejetas F, H, J, kuriems teisingos lygybės

$$\begin{gathered} HF = -FH = J, \qquad JF = -FJ = H, \qquad HJ = -JH = F, \\ F^2 = H^2 = E, \qquad J^2 = -E, \end{gathered} \tag{20}$$

čia E – vienetinė matrica [3, 7].

2 teorema. *Metrinių hiperplokštuminių elementų erdvėje, kurioje metrika apibrėžiama* (11) *lygybėmis, egzistuoja vidinių antikvarterinioninių struktūrų šeimos, priklausančios nuo trijų parametrų.*

Teoremos įrodymas išplaukia iš to, kad tenzoriams F, H, J, kurių komponentės apibrėžiamos lygybėmis

$$\begin{aligned} F^i_j &= a\delta^i_j - cg^{ik} L_{kj}, \\ F^{n+i}_j &= bg_{ij} + (a-d)L_{ij} - cg^{kh} L_{ik} L_{hj}, \\ F^i_{n+j} &= cg^{ij}, \\ F^{n+i}_{n+j} &= d\delta^j_i + cg^{jk} L_{ik}, \\ H^i_j &= e\delta^i_j - gg^{ik} L_{kj}, \\ H^{n+i}_j &= fg_{ij} + (e-h)L_{ij} - gg^{kh} L_{ik} L_{hk}, \\ H^i_{n+j} &= gg^{ij}, \\ H^{n+i}_{n+j} &= h\delta^i_i + gg^{jk} L_{ik}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
J^i_j &= p\delta^i_j - rg^{ik}L_{kj},\\
J^i_{n+j} &= rg^{ij},\\
J^{n+i}_j &= qg_{ij} + (p-s)L_{ij} - rg^{hk}L_{ik}L_{hj},\\
J^{n+i}_{n+j} &= s\delta^j_i - rg^{jk}L_{ik}
\end{aligned}$$

yra teisingos (20) tapatybės, kai p – bet kuris skaičius, skaičiai q ir m tokie, kad $|q| > |m|$, $q \neq 0$, $m \neq 0$, ir galioja lygybės

$$\begin{gathered}
a = \frac{m - g\sqrt{q^2 - m^2}}{q}, \qquad d = -\frac{m - p\sqrt{q^2 - m^2}}{q}, \qquad b = -\sqrt{q^2 - m^2},\\
c = \frac{(p^2-1)\sqrt{q^2 - m^2} - 2pm}{q^2}, \qquad r = \frac{-1 - p^2}{q}, \qquad s = -p, \\
l = \frac{pm}{q} + \frac{\sqrt{q^2 - m^2}}{m}, \qquad t = \frac{m - 2p\sqrt{q^2 - m^2} - p^2 m}{q^2}, \qquad k = -\frac{pm}{q} - \frac{\sqrt{q^2 - m^2}}{m}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Pastebėkime, kad jei $q = 0$ arba $m = 0$, egzistuoja antikvarternioninės struktūros, priklausančios nuo dviejų arba nuo vieno parametro.

3 Asocijuotos sietys

Kaip žinome [7], koliestinių sluoksniuočių T^*M^n afiniąją sietį apibrėžiame, užrašydami kovariantinės išvestinės išraiškas

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}\partial_j &= \Lambda^k_{ij}\partial_k + \Lambda^{n+k}_{ij}\partial^k, & \nabla_{\partial_i}\partial^j &= \Lambda^k_{i\ n+j}\partial_k + \Lambda^{n+k}_{i\ n+j}\partial^k,\\
\nabla_{\partial^i}\partial_j &= \Lambda^k_{n+i\ j}\partial_k + \Lambda^{n+k}_{n+i\ j}\partial^k, & \nabla_{\partial^i}\partial^j &= \Lambda^k_{n+i\ n+j}\partial_k + \Lambda^{n+k}_{n+i\ n+j}\partial^k.
\end{aligned} \tag{23}$$

Kaip įrodyta [4] darbe, dydžiai $\Lambda^k_{n+i\ n+j}$ yra tenzoriaus komponentės.

Afinioji sietis Λ yra asocijuota su antikvarternionine struktūra (F, H, J), jei tenzorių H, F ir J kovariantinės išvestinės sieties Λ atžvilgiu yra lygios nuliui [7].

3 teorema. *Afinioji sietis Λ yra asocijuota su metrinių hiperplokštuminių elementų erdvių antikvarternioninėmis struktūromis* (21) *tada ir tik tada, kai šios sieties komponentėms yra teisingos lygybės*

$$\begin{gathered}
\Lambda^k_{n+i\ n+j} = 0, \qquad \Lambda^k_{n+i\ j} = 0,\\
\partial_h g_{ij} + g_{kj}\Lambda^{n+i}_{n+k\ h} = g_{ik}\Lambda^k_{jh},\\
\partial^h g_{ij} + g_{kj}\Lambda^{n+i}_{n+k\ n+h} = g_{ik}\Lambda^k_{j\ n+h},\\
\partial_h L_{ij} - L_{ik}\Lambda^k_{jh} + L_{kj}\Lambda^{n+i}_{n+k\ h} = \Lambda^{n+i}_{jh},\\
\Gamma^h_{ij} - L_{ik}\Lambda^k_{j\ n+h} + L_{kj}\Lambda^{n+i}_{n+k\ n+h} = \Lambda^{n+i}_{j\ n+h}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Teoremos įrodymui užtenka rasti (21) lygybėmis apibrėžtų tenzorių F, H, J kovariantines išvestines ir pastebėti, kad su bet kuriomis p, q ir m reikšmėmis jos lygios nuliui tada ir tik tada, kai teisingos (24) sąlygos.

Pastebėkime, kad esant teisingoms sąlygoms $\Lambda^i_{n+j\ n+h} = \Lambda^i_{n+j\ h} = 0$, dydis $\Lambda^{n+i}_{n+j\ n+h}$ yra tenzorius, o dydis – $\Lambda^{n+i}_{n+j\ h}$ yra afiniosios sieties komponentės. Atskiru atveju tarę, kad

$$\Lambda^{n+i}_{n+j\ n+k} = 0, \qquad \Lambda^{n+i}_{n+j\ k} = -\Gamma^j_{ik}, \tag{25}$$

iš (24) lygybių gauname, kad

$$\begin{gathered}\Lambda^i_{jh} = g^{ip}\partial_h g_{ij} - g^{ip} g_{kj}\Gamma^k_{ph},\\ \Lambda^i_{j\ n+h} = g^{ik}\partial^h g_{jk}, \qquad \Lambda^{n+i}_{j\ n+h} = -\Gamma^h_{ij} + L_{ik}g^{kp}\partial^h g_{pj},\\ \Lambda^{n+i}_{jh} = \partial_h L_{ij} + L_{ik}g^{kp}\partial_h g_{pj} + L_{kj}\Gamma^k_{ih} - L_{ik}g^{kp}g_{qj}\Gamma^q_{ph}.\end{gathered} \tag{26}$$

Gautosios (25) ir (26) lygybės yra afiniosios sieties, asocijuotos su antikvarternioninėmis struktūromis (20), pavyzdys.

Literatūra

[1] V. Bliznikas. *The Finsler-Space and its Generalization.* Itogi Nauki, Moscow, 1969, pp. 73–125 (in Russian).

[2] I. Katinienė. Geometry of the tangent bundle of the space of hyperplane elements. *Lith. Math. J.*, **29**(3):464–473, 1989.

[3] V.F. Kirichenko and O.E. Arseneva. Differential geometry of generalized almost quaternionic structures. I. *Differential Geometry*, (math. DG), 2008.

[4] E. Mazėtis. Geometry in the Cartan spaces. *Lith. Math. J.*, **38**(2):221–233, 1998.

[5] D.D. Porosniuc. A class of locally symmetric Kähler Einstein structures on the nonzero cotangent bundle of a space form. *Balkan Journal of Geometry and its Application*, **9**(2):68–81, 2004.

[6] H. Rund. *The Differential Geometry of Finsler Spaces.* Springer-Verlag, 1959.

[7] K. Yano and M. Kon. *Structures on Manifolds.* Singapoore World. Sci. Publ. Co., 1984.

SUMMARY

Structure in space of hyperplane element with special metrics
E. Mazėtis

The present work analyses intrinsic antiquaternionic structures of metric hyperplane elements. Spaces of metric hyperplane elements is Cartan space generalisation. The given spaces are cotangent bundle, where metrics is described by way of symmetric tensor. The present work analyses situation when metric tensor has specific form, as it done by work [5]. It has been proved that in such metric space treeparameter intrinsic antiquaternionic structure families exist, associated affine connections with structures have been found.

Keywords: cotangent bundle, metric space of hyperplane element, linear and affine connection, antiquaternionic space, associative connection.