LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 91–96 www.mii.lt/LMR/

Matematinio ir matematikos istorijos tekstų supratimo palyginimas

Laura Gudelytė, Joana Kastickaitė, Aleksandras Krylovas, Tadas Laukevičius

Mykolo Romerio universitetas
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
E. paštas: l.gudelyte@mruni.eu; kasjoa@mruni.eu
E. paštas: aleksandras.krylovas@vgtu.lt; tadas@mruni.eu

Santrauka. Straipsnyje palyginami matematinio ir matematikos istorijos teksto supratimo rezultatai, gauti testuojant socialinių mokslų srities studentus. Eksperimente buvo apklausti 128 Mykolo Romerio universiteto Viešojo administravimo programos nuolatinių bakalauro studijų II kurso studentai, kuriems paskaitos metu buvo pateikti matematikos ir matematikos istorijos tekstai. Jų supratimui palyginti buvo panaudoti uždarojo tipo testai. Testavimo rezultatai analizuojami statistikos metodais.

Raktiniai žodžiai: žinių tikrinimo testai, statistikos metodai.

1 Įvadas

Šiuo metu visos aukštųjų mokyklų studijų programos turi skiriamą mokymuisi laiką matuojantį vienetą – kreditą, kuris atitinka 40 valandų apibendrinto studijų laiko. Tačiau ne paslaptis, jog vien tik skirti daugiau laiko mokymuisi nepakanka, kad būtų įsisavintas matematikos mokslas, nes matematikos supratimas yra pagrįstas ankstesnėmis žiniomis ir įgūdžiais. Kita vertus, pastebima tendencija universitetuose mažinti auditorinio darbo valandas. Nemažai studijų vykdoma neakivaizdiniu ar nuotoliniu būdu. Tačiau dėstant matematiką susiduriama su problema, kad socialinių mokslų srities studentas nesupranta apibrėžimų esmės ir teoremų įrodymų, nėra pajėgus savarankiškai dirbti su matematine literatūra.

Autorių nuomone, prasminga įvertinti, kiek laiko reikia studentui, kad suprastų matematinį tekstą, palyginus su, tarkime, socialinių mokslų dalyko tekstu. Beveik akivaizdu, kad panašios apimties matematiniam tekstui suprasti reikia vidutiniškai daugiau laiko. Teksto supratimą interpretuojame, kaip teisingų atsakymų į testo klausimus skaičių. Vertas dėmesio ir klausimas, ar efektyvu vien tik skirti daugiau laiko, nes tikriausiai nemaža dalis studentų negali savarankiškai suprasti kai kurių matematinių sąvokų, ir todėl būtinas tiesioginis dėstytojo dalyvavimas studijų procese. Siekdami išsamiai išnagrinėti daugiau tokio pobūdžio problemų, vykdome kompleksinį tyrimą, kuris atliekamas pradedant pačių klausimų bei testų sukūrimu ir baigiamas studentų apklausomis. Atliktas tyrimas yra tik pradinis etapas, kurio tikslas – sukurti matematinio ir matematikos istorijos teksto supratimo lygmens matavimo testus, kuriuos ateityje būtų galima taikyti minėtiems tyrimams atlikti.

2 Darbo eiga

Pagrindinis šio tyrimo tikslas yra ištirti, kaip socialinių mokslų srities studentai supranta matematinį ir matematikos istorijos tekstą bei, remdamiesi juo, sugeba atsakyti į testo klausimus. Kadangi studentų specializacija yra socialiniai mokslai, matematiniai testo klausimai yra tipiniai: jų atsakymams dažniausiai pakanka parinkti atitinkamų parametrų reikšmes. Teksto supratimo lygis matuojamas teisingai atsakytų klausimų skaičiumi. Matematikos ir matematikos istorijos tekstai buvo pasirinkti dėl skirtingo jų supratimo pobūdžio (abiejų temų teksto fragmentai pateikti 1 pav.). Formalizuoto ir dažniausiai struktūrizuoto matematikos teksto supratimui tampa svarbus deduktyvus mąstymas. Be to, matematinį tekstą studentams sudėtinga teisingai suprasti perskaičius tik vieną kartą. Kitokio pobūdžio teksto – žodžiais nusakomo turinio – supratimas labiau pagrįstas natūralia kalba ir intuicija (supratimas kalbinis – intuityvus), dažniausiai pakankamas perskaičius jį vieną kartą. Tyrimo uždavinius įvardijome tokius: parengti matematikos ir matematikos istorijos tekstus jų supratimo palyginimui; sudaryti teksto supratimo tikrinimo testą; išsiaiškinti, ar egzistuoja matematinio ir matematikos istorijos teksto supratimo skirtumai; patikrinti hipotezę: matematikos istorijos tekstas suprantamas geriau nei matematikos.

Šiam tyrimui buvo sukurtas uždarojo tipo testas su pateiktais atsakymų variantais (iš viso 18 klausimų). Norėdami užtikrinti uždavinių sprendimo savarankiškumą parengėme besiskiriančius tik kintamųjų reikšmėmis to paties uždavinio variantus (žr. [2]). Studentai turėjo stimulą kuo geriau atsakyti į testo klausimus, nes geriausiai atsakiusiems buvo pažadėtas individualus studijų grafikas ir ankstesnio atsiskaitymo už semestrą galimybė, parengiant rašto darbą.

Apibrėžimas. Skaičius A vadinamas funkcijos f riba taške a (arba, kai $x \to a$; skaitykime: kai x artėja į a), jei kiekvieną (kiek norima mažą) teigiamą skaičių ε atitinka teigiamas skaičius δ, toks, kad esant visiems x, tenkinantiems sąlygą $|x-a|<\delta$ ir $x \neq a$ yra teisinga nelygybė $|f(x)-A|<\varepsilon$. Funkcijos ribą taške a žymime $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ arba $f(x)\to A$, kai $x \to a$.

Pavyzdys. Remdamiesi ribos apibrėžimu įrodysime, kad $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$.

Įrodymas. Turime funkciją $f(x)=4x-5$, $A=7$. Paimkime teigiamą skaičių ε. Reikia įrodyti, kad egzistuoja toks skaičius δ, kai $0<|x-3|<\delta$, tai tada $|f(x)-7|<\varepsilon$. Pertvarkome reiškinį $|f(x)-7|=|4x-5-7|=|4x-12|=4|x-3|$. Matome, kad iš nelygybės $0<|x-3|<\delta$ išplaukia: $|f(x)-7|=4|x-3|<4\delta$. Taigi galime paimti $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ ir gausime, kad $|f(x)-A|<\varepsilon$. Įrodėme, kad $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$.

Jau III a. pr. m. e. graikų matematikas, fizikas, mechanikas Archimedas (apie 287–212 m. pr. m. e.), skaičiuodamas figūrų plotus ir tūrius, naudojo sąvoką, panašią į dabartinę ribos. Vokiečių astronomas ir matematikas Johanas Kepleris (1571–1630) 1615 m. sukūrė tūrių skaičiavimo būdą, kur faktiškai panaudojo nykstamųjų dydžių (t. y. funkcijų, kurių ribos lygios nuliui) analizės pradmenis. XVII–XVIII a. anglų fizikas ir matematikas Izaokas Niutonas (1643–1727) ir vokiečių matematikas Gotfrydas Vilhelmas Leibnicas (1646–1716), kurdami diferencialinį ir integralinį skaičiavimą, rėmėsi ribos sąvoka, artima šiuolaikinei.

1 pav. Studentams pateikto skaityti matematinio (aukščiau) ir matematikos istorijos (žemiau) teksto fragmentai (naudotasi [1, 3, 4]).

3 Tyrimo rezultatai ir jų analizė

Tyrimui atlikti pasirinkti Mykolo Romerio universiteto Viešojo administravimo programos bakalauro nuolatinių studijų II kurso studentai. Per pirmąją paskaitą apklausti 128 respondentai, kuriems ketvirtame semestre dėstomas taikomosios matematikos ir kiekybinių metodų dalykas. Kiekvienam studentui buvo pateiktas teksto lapas, testas (2 pav. pateikti pirmieji du klausimai) bei atsakymų kortelė, kurioje reikėjo pažymėti teisingus atsakymus. Matematikos klausimais tikrinome, ar socialinių mokslų srities studentai, remdamiesi tekstu, moka užrašyti funkcijos ribą taške (klausimas pateiktas straipsnyje), supranta taško aplinkos, nykstamojo dydžio, realiųjų teigiamų skaičių, kurie taikomi apibrėžiant funkcijos ribą taške sąvokas, remdamiesi apibrėžimu, geba įrodyti, kam lygi funkcijos riba taške. Matematikos istorijos klausimais tikrinome, ar socialinių mokslų srities studentai, remdamiesi tekstu, sugeba atsakyti į klausimus apie matematikos mokslininkus, kurie prisidėjo prie ribos sąvokos vystymosi, ir jų darbus. Naudojant atsakymų korteles, testai buvo automatizuotai patikrinti, surinkti duomenys statistiškai apdoroti.

Tyrimui atlikti parinkta viena iš programoje numatytų temų – „Funkcijos riba“. Teksto pirmojoje dalyje pateikti funkcijos ribos apibrėžimai, tas pats ribų teorijos uždavinys buvo išnagrinėtas dviem būdais. Teksto antrojoje dalyje aprašyta ribos apibrėžimo raidos istorija. Iš studentų atsakymų histogramos (3 pav.) matyti, kad yra vienintelis studentas, neatsakęs nė į vieną matematinį klausimą; 5 studentai, atsakę tik į vieną matematinį klausimą; 11 studentų, atsakiusių į 2 matematinius klausimus ir t.t. Studentų atsakymai į matematikos istorijos klausimus pastebimai geresni, nei į matematinius klausimus (4 pav.).

Testo klausimų sudėtingumo diagramoje (4 pav.) matyti, kad yra klausimų, į kuriuos studentai atsakė beveik visiškai teisingai (1, 7, 8, 9 klausimai). Tai liudija, kad studentų požiūris į testą buvo atsakingas, o minėti klausimai pasirodė lengvi. Todėl testą reikia tobulinti, t.y. pakeisti lengvus klausimus sunkesniais.

Remdamiesi perskaitytu tekstu atsakykite į klausimus

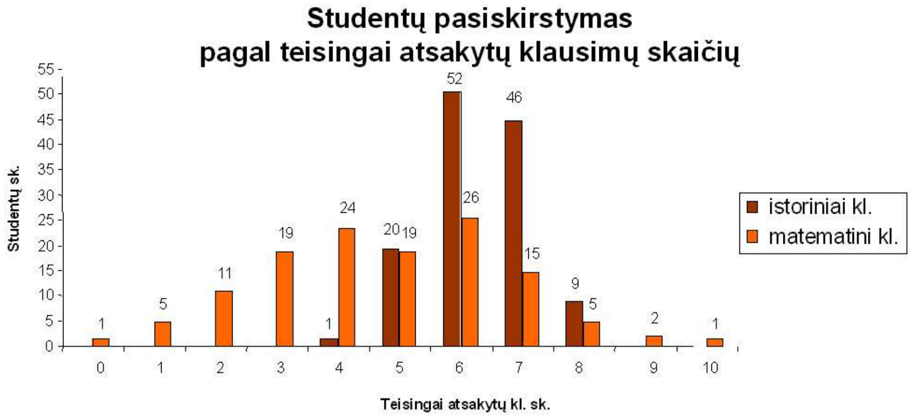
1 17-18 a. diferencialinį skaičiavimą kūrė ________

1 Niutonas ir Bolcanas; 2 Koši;
3 Bolcanas; 4 Leibnicas ir Koši;
5 Leibnicas ir Bolcanas; 6 Niutonas ir Leibnicas;
7 Niutonas ir Koši; 8 Leibnicas;
9 Niutonas; 0 Bolcanas ir Koši.

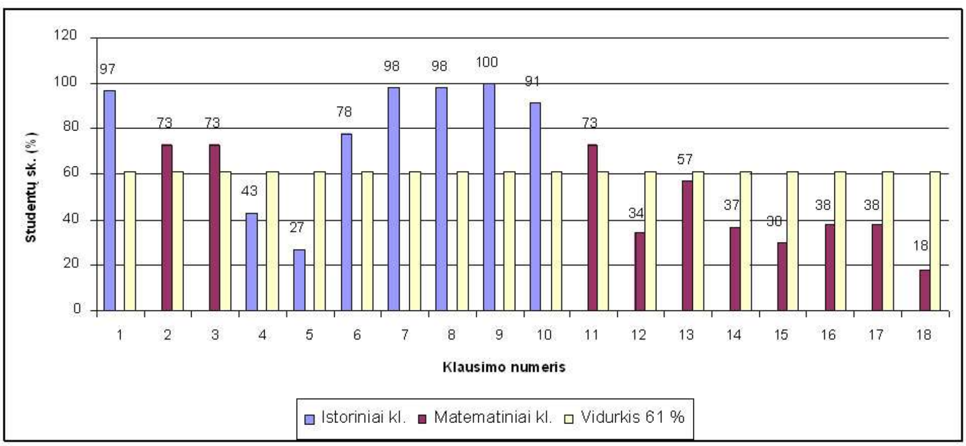
2 Teiginį „skaičius 32 yra funkcijos $y = \frac{z-174}{z-19}$ riba taške 14“ užrašome taip:

1 $\lim\limits_{z\to-32} \frac{z-174}{z-19} = -14$; 2 $\lim\limits_{z\to14} \frac{z-19}{z-174} = 32$;
3 $\lim\limits_{z\to-32} \frac{z-19}{z-174} = 14$; 4 $\lim\limits_{z\to-14} \frac{z-174}{z-19} = 32$;
5 $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z-174}{z-19} = 32$; 6 $\lim\limits_{z\to32} \frac{z-174}{z-19} = 14$;
7 $\lim\limits_{z\to14} \frac{z+2}{z+191} = 32$; 8 $\lim\limits_{z\to14} \frac{z-174}{z-19} = 32$.

2 pav. Du pirmieji klausimai.



3 pav. Teisingai atsakiusių į matematinius (teste 10 kl.) ir matematikos istorijos klausimus studentų pasiskirstymas (teste 8 kl.).



4 pav. Teisingai atsakiusių į testo konkretų klausimą studentų skaičiaus procentais palyginimas su bendru vidurkiu (klausimų sudėtingumo diagrama).

Palyginome studentų, geriausiai atsakiusių į matematinius klausimus (7–10 kl.), teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų skaičiaus vidurkį su likusių studentų teisingai atsakytų tų pačių klausimų skaičiaus vidurkiu. Žinodami visų teisingai atsakytų matematinių klausimų kiekio vidurkį 4.72, dispersiją 3.76, teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų kiekio vidurkį 6.33 (dešimtbalėje vertinimo sistemoje 7.91), dispersiją (0.72) ir tikrinome hipotezes. Nuline hipoteze H_0 pasirinkome teiginį, kad teisingai atsakytų matematinių ir matematikos istorijos klausimų skaičiaus vidurkiai yra lygūs. Alternatyvioji hipotezė H_1 – teisingai atsakytų matematinių klausimų skaičiaus vidurkis yra mažesnis už teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų skaičiaus vidurkį. Pasinaudoję 1 lentelės duomenimis ir Stjudento kriterijaus t skaičiavimo formule, gavome: $t \approx 17.07$, $s_d^2 \approx 4.47$. Kadangi Stjudento skirstiniui, kai statistinio reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.01$, laisvės laipsnis $k = 127$, $t > t_{(0.01;127)} = 2.62$ (čia $t_{(0.01;127)}$ – Stjudento skirstinio kritinis taškas), hipotezė

1 lentelė. Teisingų atsakymų kiekio vidurkių palyginimas.

(geriausi mat. (7–10) kl. vid.) 7.52	(mat. istorijos kl. vid.) 7.94
(geriausi mat. istorijos (7–8) kl. vidurkis) 7.39 (dešimtbalė sist. 9.2)	(mat. kl. vid.) 4.96
(atsakiusių į 6 ir mažiau mat. kl. vid.) 4.1	(mat. istorijos kl. vid.) 6.3 (dešimtbalė sist. 7.9)
(atsakiusių į 6 ir mažiau mat. istorijos kl. vid.) 5.70 (dešimtbalė sist. 7.1)	(mat. kl. vid.) 4.59

H_0 atmetama, ir priimama alternatyvioji hipotezė H_1, kad teisingai atsakytų matematinių klausimų skaičiaus vidurkis yra mažesnis už teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų kiekio vidurkį.

Panašiai patikrintos dar dvi hipotezės. Viena hipotezė – studentų, geriausiai atsakiusių į matematinius klausimus (iš viso 7–10 kl.), teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų kiekio vidurkis nėra didesnis už likusių studentų teisingai atsakytų klausimų kiekio vidurkį esant alternatyvai, kad studentų, geriausiai atsakiusių į matematinius klausimus (iš viso 7–10 kl.), teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų kiekio vidurkis yra didesnis už likusių studentų teisingai atsakytų matematikos istorijos klausimų kiekio vidurkį. Kita hipotezė – studentų, geriausiai atsakiusių į matematikos istorijos klausimus (iš viso 7–8 kl.), teisingai atsakytų matematinių klausimų skaičiaus vidurkis nėra didesnis už likusių studentų teisingai atsakytų matematinių klausimų kiekio vidurkį esant alternatyvai, kad studentų, geriausiai atsakiusių į matematikos istorijos klausimus (iš viso 7–8 kl.), atsakytų matematinių klausimų kiekio vidurkis yra didesnis už likusių studentų teisingai atsakytų matematinių klausimų vidurkį. Nulinės hipotezės dviem paskutiniais atvejais neatmetamos. Taigi nėra aiškaus statistinio ryšio, t.y. koreliacija tarp matematikos ir matematikos istorijos klausimų teisingų atsakymų kiekių yra 0.11.

4 Išvados

1. Socialinių mokslų srities studentai geriau supranta matematikos istorijos tekstą, nei matematinį tekstą ir todėl, remdamiesi tekstu, lengviau sugeba teisingai atsakyti į pateikto testo matematikos istorijos klausimus nei matematikos teorijos klausimus;
2. Studentų matematikos žinios iš esmės neturi įtakos matematikos istorijos teksto supratimui;
3. Geras studentų matematikos istorijos teksto supratimas ir teisingi atsakymai į tokius klausimus neturi įtakos jų matematikos žinioms.

Nors aprašyto eksperimento pirmoji hipotezė gali atrodyti akivaizdi, tačiau antroji ir trečioji yra šiek tiek netikėtos ir reikalauja papildomo tyrimo. Ateityje numatoma pratęsti eksperimentą, pailginti skaitymo laiką (teksto skaitymui ir atsakymams į klausimus buvo skirta 1 akademinė valanda) ir duoti skaityti studentams tik matematinį tekstą. Taip pat būtina tobulinti testą, visų pirma pakeisti lengvus klausimus sunkesniais. Tai turėtų leisti išmatuoti, kiek reikia laiko matematiniam tekstui suprasti.

Literatūra

[1] A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer. *Puti i labirinty po istoriji matematiki.* Mir, Moskva, 1986. (Vertimas į rusų kalbą).

[2] A. Krylovas, O. Suboč, N. Kosareva. Diskrečios matematikos žinių tikrinimo testų lygiagrečiųjų variantų lygiavertiškumo tyrimas. *Lietuvos matematikos rinkinio spec. nr., LMD darbai*, **47**:249–253, 2007.

[3] D.J. Stroik. *Kratkij otčerk istoriji matematiki.* Nauka, Moskva, 1978.

[4] J. Šimkūnas, A. Urbonas. *Matematinės analizės uždavinynas.* VPU, Vilnius, 2001.

SUMMARY

Comparison of understanding of mathematical and mathematics history texts

L. Gudelytė, J. Kastickaitė, A. Krylovas, T. Laukevičius

The article compares results of testing how students in the field of social sciences understand the text in mathematics and math history. During the experiment 128 second-year students in the Bachelor's studies in the Public Administration Programme at Mykolas Romeris University were surveyed. They used given texts in mathematics and math history during the lecture. To compare their understanding, closed-end tests were used. The results of testing have been analysed using statistical methods.

Keywords: test of knowledge, statistical methods.