Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 97–102 www.mii.lt/LMR/

2010 m. VPU jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Eglė Jakaitytė[1], **Algirdas Kaučikas**[2,1], **Edmundas Mazėtis**[1]

[1] *Vilniaus pedagoginis universitetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius
[2] *Mykolo Romerio universitetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
E. paštas: egle.jakaityte@gmail.com; algirdas.kaucikas@mruni.lt; edmundas@vpu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariami 2010 metų VPU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

Siekdami, kad į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadas patektų visi stipriausieji, olimpiadų organizatoriai nusprendė vykdyti atrankines olimpiadas, kuriose galėtų dalyvauti visi norintieji, iš kurių galima būtų atrinkti pačius geriausius. Tokie atrankiniai turai vykdomi nuo 1992 metų. Tai Kauno Technologijos unoversiteto prof. S. Matulionio konkursas, Šiaulių universiteto matematikų olimpiada ir Vilniaus pedagoginio universiteto jaunųjų matematikų olimpiada.

2010 m. kovo 6 d. vyko jau XIX jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė docentai A. Kaučikas ir E. Mazėtis.

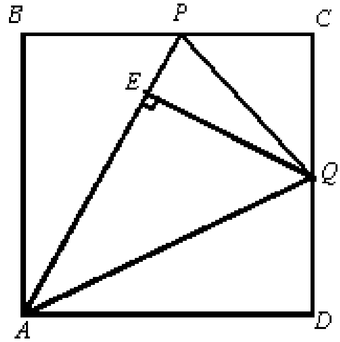
1 IX klasė

1. *Išspręskite lygčių sistemą* $\begin{cases} xy = z - x - y, \\ yz = x - y - z, \\ zx = y - x - z. \end{cases}$

   Sudėję pirmąją ir antrąją sistemos lygtis gauname, kad $y(x + z + 2) = 0$. Jei $y = 0$, iš pirmosios lygties gauname, kad $z = x$. Tada iš trečiosios lygties seka, kad $x^2 = -2x$. Iš čia gauname du sistemos sprendinius $(0; 0; 0)$ ir $(-2; 0; -2)$. Analogiškai gauname dar du sprendinius $(-2; -2; 0)$ ir $(0; -2; -2)$. Jei nei vienas nežinomasis nėra lygus 0, tada $\begin{cases} x + y = -2, \\ y + z = -2, \\ z + x = -2. \end{cases}$ Sudėję visas šias lygtis gauname, kad $x + y + z = -3$ ir $x = y = z = -1$.

   Ats.: $(0; 0; 0)$, $(-1; -1; -1)$, $(0; -2; -2)$, $(-2; 0; -2)$, $(-2; -2; 0)$.

2. *Raskite visus pirminius skaičius p ir q, su kuriais būtų teisinga lygybė $p + q = (p - q)^3$.*



1 pav.

Sakykime, kad $p - q = n$, tai $p + q = n^3$. Iš čia $2p = n + n^3$, $p = \frac{n^3+n}{2}$, $2q = n^3 - n$, $q = \frac{n^3-n}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}$. Trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga dalijasi iš 3, taigi q dalijasi iš 3. Vienintelis pirminis skaičius, kuris dalijasi iš 3 yra 3. Taigi $q = 3$. Tada $n^3 - n = 6$, iš čia $n = 2$, $p = 5$.

Ats.: $p = 5$, $q = 3$.

3. *Princui dabar 24 metai. Kai tiek metų sukaks princesei, princui bus dvigubai daugiau metų, negu buvo princesei tuo metu, kai princo amžius buvo lygus jų dabartinių metų skaičių aritmetiniam vidurkiui. Kiek dabar yra metų princesei?*

   Tarkime, kad princesei dabar x metų. Kai princesei bus 24 metai, bus parėję $24 - x$ metų. Tuo metu princui bus $48 - x$ metų. Kai princui buvo $\frac{24+x}{2}$ metų, princesei buvo $x + \frac{24+x}{2} - 24 = \frac{3x}{2} - 12$. Pagal sąlygą $48 - x = 2(\frac{3x}{2} - 12)$. Iš čia $x = 18$.

4. *Taškas Q yra kvadrato $ABCD$ kraštinės CD vidurio taškas. Kraštinėje BC yra taškas P toks, kad $\angle QAD = \angle QAP$. Raskite kampo AQP didumą.*

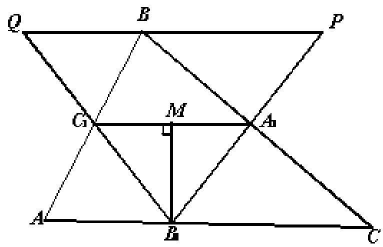
   Iš taško Q nuleidžiame statmenį QE į tiesę AP (1 pav.). Stačiųjų trikampių AQD ir AQE įžambinė bendra, o smailieji kampai pagal sąlygą yra lygūs, taigi tie trikampiai lygūs, todėl $EQ = QD = \frac{1}{2}AB$. Statieji trikampiai EPQ ir CPQ lygūs, nes jų įžambinė bendra, o statiniai EQ ir CQ yra lygūs. Todėl kampai EPQ ir CPQ lygūs. Iš stačiųjų trikampių AQD, APQ ir PQC gauname, kad $\angle AQD = \angle APQ$, $\angle PQC = \angle PAQ$. Tuomet $\angle AQP = 180° - (\angle AQD + \angle PQC) = 180° - (\angle APQ + \angle PAQ) = 180° - 90° = 90°$.

2 X klasė

1. *Įrodykite, kad visiems teigiamiems skaičiams x, y, z teisinga nelygybė*

$$\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Kadangi vardikliai teigiami, nelygybė ekvivalenti $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8yz$. Žinome, kad visiems neneigiamiems a, b teisinga nelygybė $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Pritaikę



2 pav.

šią nelygybę daugikliams $x+y$, $y+z$ ir $z+x$, gauname, kad $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} = 8xyz$.

2. *Knygoje* 100 *puslapių, sunumeruotų nuo* 1*iki* 100*. Petriukas keletą lapų išplėšė. Sudėjus likusių neišplėštų puslapių numerius, gavome* 4949*. Kiek lapų Petriukas išplėšė?*

   Išplėšus vieną lapą, išplėšiamas vienas puslapis su nelyginiu numeriu ir vienas puslapis su vienetu didesniu lyginiu numeriu, t.y. puslapiai su numeriais $2k-1$ ir $2k$. Išplėštų puslapių numerių suma yra $4k-1$. Taigi išplėšus n lapų, išplėštų puslapių numerių suma yra $4(k_1+k_2+\cdots+k_n)-n$. Puslapių numerių suma buvo $1+2+\cdots+100=5050$, taigi išplėšus ši suma sumažėjo skaičiumi 101. Iš čia seka, kad $4(k_1+k_2+\cdots+k_n)-n=101$, t.y. $101-n$ dalijasi iš 4. Pastebėjime, kad išplėštų lapų skaičius $n<7$, nes išplėšus pirmuosius 7 lapus, jų puslapių numerių suma $(1+2)+(3+4)+\cdots+(13+14)=\frac{1+14}{2}\cdot 14=105>101$. Taigi tinka tik $n=3$. Pastebėkime, kad išplėšus 3 lapus: pirmąjį, antrąjį ir dvidešimt trečiąjį, išplėštųjų puslapių suma yra $(1+2)+(3+4)+(45+46)=101$.

   Ats.: išplėšti trys lapai.

3. *Ar bet kokį trikampį dviem tiesialinijiniais pjūviais galima supjaustyti į* 3 *dalis, iš kurių galima sudėti lygiašonį trikampį? Jei taip, tai nurodykite, kaip reikia pjauti.*

   Sakykime, kad AC – ilgiausioji trikampio kraštinė (arba viena iš ilgiausiųjų, jei jų daugiau negu viena), A_1C_1 – lygiagreti su ja vidurinė linija, M – atkarpos A_1C_1 vidurio taškas, B_1 – taško M ortogonalioji projekcija tiesėje AC (2 pav.). Kadangi trikampio kampai A ir C – smailieji, tai taškas B_1 yra atkarpoje AC. Sakykime, kad taškai P ir Q yra simetriški taškui B_1 taškų C_1 ir A_1 atžvilgiu. Kadangi centro atžvilgiu simetriškos tiesės yra lygiagrečios, tai $BP||B_1C$, $BQ||B_1A$, t.y. taškai B, P ir Q yra vienoje tiesėje. Akivaizdu, kad $\triangle AC_1B_1=\triangle BC_1Q$, $\triangle CB_1A_1=\triangle BPA_1$. Trikampiai $B_1A_1C_1$ ir B_1QP – panašieji, nes $A_1C_1||PQ$. Kadangi trikampio $B_1A_1C_1$ aukštinė B_1M yra ir pusiaukraštinė, tai jis lygiašonis. Taigi lygiašonis ir trikampis B_1PQ.

   Ats.: kiekvieną trikampį dviem pjūviais, einančiais per tieses B_1C_1 ir A_1B_1 galima supjaustyti į tris dalis, iš kurių sudedamas lygiašonis trikampis B_1PQ.

4. *Raskite visus pirminius skaičius p ir q, su kuriais būtų teisinga lygybė $p+q=(p-q)^3$ (žr.* IX *klasės* 2 *uždavinį).*

3 XI klasė

1. *Didesniems už* 1 *skaičiams* x, y, z *yra teisingos nelygybės* $\frac{x^2}{x-1} > x+y+z$, $\frac{y^2}{y-1} > x+y+z$, $\frac{z^2}{z-1} > x+y+z$. *Įrodykite, kad* $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} > 1$.

   Iš nelygybės $\frac{x^2}{x-1} > x+y+z$ išplaukia, kad $x^2 > (x+y+z)(x-1)$, t.y. $x+y+z > x(y+z)$. Iš čia gauname, kad $\frac{1}{y+z} > \frac{x}{x+y+z}$. Analogiškai gauname tokias nelygybes: $\frac{1}{x+y} > \frac{z}{x+y+z}$, $\frac{1}{x+z} > \frac{y}{x+y+z}$. Sudėję šias gautąsias nelygybes, gauname tai, ką ir reikėjo įrodyti.

2. *Ar egzistuoja* 10 *skirtingų sveikųjų skaičių, tokių, kad bet kurių* 9 *jų suma yra sveikojo skaičiaus kvadratas? Jei taip, tai pateikite* 10 *tokių skaičių rinkinio pavyzdį.*

   Sakykime, kad $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ yra duotieji skaičiai, o S – jų suma. Pagal sąlygą $S - x_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} = n_1^2$. Analogiškai $S - x_2 = n_2^2, \ldots, S - x_{10} = n_{10}^2$. Sudėję šias lygybes gauname $9S = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{10}^2$. Iš čia seka, kad $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{10}^2$ dalijasi iš 9. Tuomet paėmus $n_1 = 3$, $n_2 = 3 \cdot 2, \ldots, n_{10} = 3 \cdot 10$ gauname, kad $S = \frac{1}{9} \cdot 3^2(1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) = 385$. Tada $x_1 = S - 3^2 = 376$, $x_2 = S - (3 \cdot 2)^2 = 349$, $x_3 = 304$, $x_4 = 241$, $x_5 = 160$, $x_6 = 61$, $x_7 = -56$, $x_8 = -192$, $x_9 = -345$, $x_{10} = -524$.

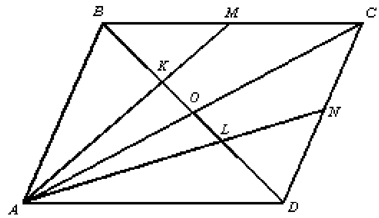
3. *Šimto natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas neviršija* 100, *suma lygi* 200. *Ar visada iš jų galima išrinkti keletą skaičių, kurių suma lygi* 100?

   Įrodysime, kad tai padaryti visada galima. Teiginys akivaizdžiai teisingas, kai visi skaičiai lygūs, nes tuomet jie visi lygūs 2. Tarkime, kad ne visi skaičiai lygūs. Sakykime, kad tai skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ ir $a_1 < a_2 < 100$. Pažymėkime $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $1 \leqslant n \leqslant 99$. Tada galime užrašyti šimtą skaičių $a_1 < a_2 < S_2 < \cdots < S_{99}$.

   Jei visų šių skaičių liekanos, dalijant iš 100 yra skirtingos, tai viena iš jų lygi nuliui. Kadangi $1 \leqslant S_n < 200$, tai viena iš sumų S_k lygi 100, ir teiginys teisingas. Sakykime, kad dvi liekanos tarpusavyje lygios. Bet a_2 ir a_1 liekanos, dalijant iš 100 yra skirtingos, todėl vienodas liekanas, dalijant iš 100 turi skaičiai S_n ir a_2, $n \geqslant 3$, arba S_n ir S_k, $n < k$. Tada $S_n - a_2$ arba $S_k - S_n$ yra leketo duotųjų skaičių sumos lygios 100.

4. *Taškai* M *ir* N *yra lygiagretainio* $ABCD$ *kraštinių* BC *ir* CD *vidurio taškai. Ar lygiagretainis* $ABCD$ *gali būti toks, kad spinduliai* AM *ir* AN *dalytų kampą* BAD *į tris lygias dalis?*

   Sakykime, kad lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O, tiesės AM ir AN kerta įstrižainę BD taškuose K ir L (3 pav.). Trikampyje ABC atkarpos AM ir BO yra pusiaukraštinės, todėl $\frac{BK}{KO} = 2$. Analogiškai $\frac{DL}{LO} = 2$, t.y $KO = \frac{1}{2}BK$, $LO = \frac{1}{2}DL$. Iš to, kad $BO = OD$ seka $BK = LD = KL = \frac{2}{3}OB$. Trikampyje BAL atkarpa AK yra ir pusiaukampinė, ir pusiaukraštinė, taigi jis lygiašonis, t.y. $AB = AL$ ir $AK \perp BL$. Analogiškai $AL \perp DK$. Taigi tiesės AK ir AL yra statmenos tiesei BD, o to būti negali.



3 pav.

4 XII klasė

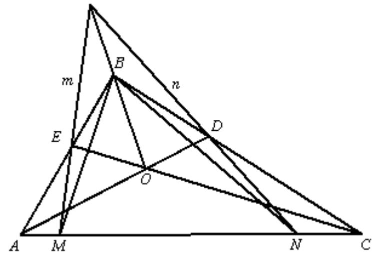
1. *Raskite reiškinio* $f(x,y,z) = \frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ *didžiausią reikšmę, kai* x, y, z *– teigiami skaičiai.*

   Sukeitus vietomis kintamuosius reiškinio f reikšmė nepasikeičia ir $f(x,x,x) = \frac{9}{8}$, todėl kyla natūrali hipotezė, kad $f(x,y,z) \leqslant \frac{9}{8}$. Ši nelygybė yra ekvivalenti teiginiui $9(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8(xy+yz+zx)(x+y+z)$. Atskliaudę ir sutraukę panašiuosius narius gauname nelygybę $x^2y+yz^2+y^2z+zx^2+xy^2+xz^2 \geqslant 6xyz$, kuri ekvivalenti teisingai nelygybei $x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geqslant 0$.

2. *Ar egzistuoja* 10 *skirtingų sveikųjų skaičių, tokių, kad bet kurių 9 jų suma yra sveikojo skaičiaus kvadartas? Jei taip, tai pateikite* 10 *tokių skaičių rinkinio pavyzdį* (*žr.* XI *klasės* 2 *uždavinį*).

3. *Taškas O yra trikampio ABC pusiaukampinių AD ir CE sankirtos taškas. Tiesė, simetriška tiesei AB tiesės CE atžvilgiu ir tiesė, simetriška tiesei BC tiesės AD atžvilgiu, kertasi taške K. Kokį kampą sudaro tiesės KO ir AC?*

   Sakykime, kad tiesės KE ir KD kerta tiesę AC taškuose M ir N (4 pav.). Trikampiai CBE ir CME yra simetriški tiesės CE atžvilgiu, todėl jie lygūs, t.y. $\angle KMC = \angle B$. Trikampiai ABD ir AND simetriški tiesės AD atžvilgiu, todėl jie lygūs ir $\angle KNA = \angle B$. taigi $\triangle KMN$ lygiašonis. Kadangi $BE = ME$ ir EC yra $\angle MEB$ pusiaukampinė, todėl atkarpa CE yra atkarpos BM vidurio statmuo. Analogiškai tiesė AD yra atkarpos BN vidurio statmuo. Taigi taškas O yra apie trikampį BMN apibrėžto apskritimo centras. Kadangi $\triangle MKN$



4 pav.

lygiašonis, tai taškas O yra atkarpos MN vidurio statmenyje. Taigi tiesė KO statmena tiesei AC.

Ats.: 90°.

4. *Šimto natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas neviršija* 100, *suma lygi* 200. *Ar visada iš jų galima išrinkti keletą skaičių, kurių suma lygi* 100? (*žr.* XI *klasės* 3 *uždavinį*).

Literatūra

[1] V. Gedvilas, *Iššūkiai aukštajame moksle*. http://www.ku.lt/profsaj/doc/issukiai _am_2010-04-23.ppt. Žiūrėta 2010-05-13.

[2] M. Jackevičius, straipsniai. http://www.technologijos.lt/n/svietimas/kurstoti/ mokymo _istaigos_lt/. 2010-01-21

[3] D. Rimkuvienė, J. Kaminskienė, D. Raškinienė. Išankstinė studentų nuomonė apie statistiką. *Liet. matem. rink.*, LMD darbai, 48/49:125–131, 2008.

[4] J. Kaminskienė, D. Raškinienė. Apie stojusiųjų į LŽŪU 2000 metais matematinį pasirengimą. *Liet. matem. rink.*, 41(spec. nr.):362–368, 2001.

[5] Žinių tikrinimo testas. http://www.thatquiz.org/. Žiūrėta 2009-09-05.

SUMMARY

Survey of VPU olympiad 2010 for young mathematicians
E. Jakaitytė, A. Kaučikas, E. Mažėtis

The texts and solutions of the VPU young mathematicians olympiad – 2010 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.