Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 41–46

Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesinių svyravimų asimptotikų tyrimas

Olga LAVCEL, Aleksandras KRYLOVAS
Mykolo Romerio universitetas
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
el. paštas: olgal@mruni.lt; krylovas@mruni.lt

Santrauka. Nagrinėjamas stygos netiesinių svyravimų matematinis modelis. Uždavinio asimptotiniam sprendiniui rasti antrojo autoriaus darbe buvo sukonstruota suvidurkintoji integralinių diferencialinių lygčių sistema. Siūloma metodika šios sistemos sprendinių specialaus pavidalo artiniams konstruoti.

Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos, aproksimacijos.

Įvadas

Straipsniuose [2,8] buvo nagrinėjami absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniai svyravimai, esant mažai svyravimų amplitudei. Asimptotiniam artiniui rasti buvo gauta tokia integralinė diferencialinė sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^+}{\partial \tau} + \beta \cdot (R^+)^2 \frac{\partial R^+}{\partial y^+} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R^-(\tau, y^+ - 2s)}{\partial y^-} \cos\bigl(\omega(y^+ - s)\bigr)\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{\partial R^+}{\partial y^+} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^-)^2(\tau, y^+ - 2s)\,\mathrm{d}s, \\
\frac{\partial R^-}{\partial \tau} - \beta \cdot (R^-)^2 \frac{\partial R^-}{\partial y^-} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R^+(\tau, y^- + 2s)}{\partial y^+} \cos\bigl(\omega(y^- + s)\bigr)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{\partial R^-}{\partial y^-} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^+)^2(\tau, y^- + 2s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{1}$$

su periodinėmis pradinėmis sąlygomis

$$R^\pm\bigl(\tau, y^\pm\bigr)\big|_{\tau=0} = R_0^\pm\bigl(y^\pm\bigr) \equiv R_0^\pm\bigl(y^\pm + 2\pi\bigr). \tag{2}$$

Čia α, β, ω – pastovūs parametrai, $\tau = \varepsilon t$ – lėtasis laikas, $y^\pm = x \mp t$ – greitieji charakteristiniai kintamieji. Visų uždavinio parametrų ir kintamųjų fizikinė prasmė paaiškinta [1] darbe. Kai funkcijos $R_0^\pm$ yra tolydžiai diferencijuojamos, egzistuoja tokia teigiama konstanta τ_0, kad (1), (2) uždavinys turi vienintelę tolydžiai diferencijuojamą (tiek kartų, kiek $R_0^\pm$) periodinę pagal $y^\pm$ sprendinį $R^\pm(\tau, y^\pm)$ srityje $[0, \tau_0] \times (-\infty, +\infty)$ (žr. [1]). Šio darbo tikslas – sukonstruoti (1), (2) uždavinio sprendinio tokio pavidalo artinį

$$R^{\pm}_{N,M}\big(\tau, y^{\pm}\big) = a^{\pm}_0(\tau) + \sum_{k=1}^{N} a^{\pm}_k(\tau)\cos\big(ky^{\pm}\big) + b^{\pm}_k(\tau)\sin\big(ky^{\pm}\big), \tag{3}$$

kai $a^{\pm}_k(\tau)$, $b^{\pm}_k(\tau)$ yra M-tojo laipsnio polinomai.

Atkreiptinas dėmesys, kad (1), (2) pavidalo sistemos atsiranda taikant vidurkinimo metodą netiesinių bangų rezonansinės sąveikos modeliuose [2,3,6–10]. Dažnai tokios sistemos paliekamos neišspręstos kaip atskiras uždavinys asimptotikai rasti [2,6,9,10], darbuose [4,5] (1), (2) pavidalo uždavinai buvo sprendžiami skaitiniais metodais.

1. Šiame darbe konstruosime (3) pavidalo (1), (2) uždavinio sprendinio artinius. Funkcijas $R^{\pm}(T, y^{\pm})$ išskleiskime Furie eilute

$$R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big) = a^{\pm}_0(\tau) + \sum_{k=1}^{N} a^{\pm}_k(\tau)\cos\big(ky^{\pm}\big) + b^{\pm}_k(\tau)\sin\big(ky^{\pm}\big). \tag{4}$$

Įrašome (4) į nagrinėjamą (1) sistemą ir gauname naują paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą. Parodome Maple programos fragmentą, kai grupuojami nariai prie vienodų harmonikų $\cos(ky^{\pm})$, $\sin(ky^{\pm})$:

```
for k to n do a_k^±(τ) := coeff(R^±(τ, y^±), cos(k·y^±)) end do;
for k to n do b_k^±(τ) := coeff(R^±(τ, y^±), sin(k·y^±)) end do.
```

Funkcijų $a^{\pm}_k(\tau), b^{\pm}_k(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$ ieškosime polinomų su neapibrėžtais koeficientais pavidalu:

$$a^{\pm}_k(\tau) = \sum_{i=0}^{M} a^{\pm}_{ki}\tau^i, \quad b^{\pm}_k(\tau) = \sum_{i=1}^{M} b^{\pm}_{ki}\tau^i. \tag{5}$$

Įrašome (4) reiškinius į paprarstųjų diferencialinių lygčių sistemą ir grupuojame narius prie vienodu τ laipsnių. Gauname sąryšius polinomų koeficientams $a^{\pm}_k, b^{\pm}_k$ rasti. Narių grupavimo Maple programos fragmentas atrodo taip:

```
for i to M do
for k to N do a_0i^± := subs(τ = 0, a_k^±) end do;
for k to N do b_0i^± := subs(τ = 0, b_k^±) end do;
for k to N do b_ki^± := coeff(collect((1/k)·b_k^±, [τ^i]), τ^i) end do;
for k to N do a_ki^± := coeff(collect((1/k)·a_k^±, [τ^i]), τ^i) end do;
end do;
```

2. Dėl apribojimų straipsnio apimčiai nagrinėsime tik nerezonansinį atvejį, t. y. kai (1) sistemoje $\alpha = 0$. Pastebėkime, kad tą patį rezultatą gausime, kai $\alpha \neq 0$ ir ω iracionalusis skaičius.

$$\frac{\partial R^{\pm}}{\partial \tau} \pm \beta \cdot \big(R^{\pm}\big)^2 \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{+}} = \mp \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} \cdot \frac{\beta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(R^{\mp}\big)^2(\tau, y^{\pm} \mp s)\,\mathrm{d}s. \tag{6}$$

Spręsime (6) lygtį esant periodinėms pradinėms sąlygoms

$$R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big)\big|_{\tau=0} = \sin\big(y^{\pm}\big). \tag{7}$$

Pastebėkime, kad (4) funkcijai $R^{\pm}(\tau, y)$ galioja lygybė

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(R^{\mp}\big)^2(\tau, y)\,\mathrm{d}y = a_0^2(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(\tau) + b_k^2(\tau),$$

t. y. (6) sistemos integralai nepriklauso nuo $y^{\pm}$. Padauginkime kiekvieną iš (6) lygčių iš R^+ ir R^- atitinkamai ir integruojame pagal y nuo 0 iki 2π. Gauname

$$\frac{\partial}{\partial y^{\pm}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(R^{\mp}\big)^2(\tau, y^{\pm}\mp s)\,\mathrm{d}s\right) = 0.$$

Taigi $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R^{\mp})^2(\tau, y^{\pm}\mp s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R^{\mp})^2(0, y^{\pm}\mp s)\,\mathrm{d}s$ – const ir dvi (6) lygtys yra nepriklausomos.

3. Kiekvieną (6), (7) uždavinio sprendinį galima užašyti neišreikštinės funkcijos pavidalu:

$$R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big) = \sin\big(y^{\pm} \mp \beta\big((R^{\pm})^2 \pm (R^{\mp})^2\big)\tau\big). \tag{8}$$

Parodykime, kad (8) yra uždavinio sprendinys. Funkcijos $R^{\pm}(\tau, y^{\pm})$ išvestinė pagal τ:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big) = \mp\frac{\cos(y^{\pm} \mp \beta((R^{\pm})^2 \pm (R^{\mp})^2)\tau)(\beta((R^{\pm})^2 \pm (R^{\mp})^2))}{1 \pm \cos(y^{\pm} \mp \beta((R^{\pm})^2 \pm (R^{\mp})^2)t)2\beta\tau R^{\pm}}. \tag{9}$$

Funkcijos $R^{\pm}(\tau, y^{\pm})$ išvestinė pagal y:

$$\frac{\partial}{\partial y}R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big) = \frac{\cos(y^{\pm} \mp \beta((R^{\pm})^2 \pm (R^{\mp})^2)\tau)}{1 \pm \cos(y^{\pm} \mp \beta((R^{\pm})^2 \pm (R^{\mp})^2)\tau)2\beta\tau R^{\pm}}. \tag{10}$$

Įrašę (9), (10) į (6) lygtis gauname tapatybes.

Išskleiskime funkcijas $R^{\pm}$ Teiloro formule. Pažymėję D_jU funkcijos U j-tosios eilės išvestines, gauname:

$$R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big) = \sum_{j=0}^{M}\frac{D_jR^{\pm}\big(0, y^{\pm}\big)}{j!}\,\tau^j + O\big(\tau^{M+1}\big).$$

Apskaičiavę $D_jR^{\pm}$ eilės išvestines, užrašome artinių formules:

$$\begin{aligned} R^{\pm}\big(\tau, y^{\pm}\big) &= \left(1 - \frac{13}{16}\tau^2 + \frac{133}{1024}\tau^4 - \frac{1441}{147456}\tau^6\right)\sin(y) \\ &\quad + \left(\mp\frac{5}{4}\tau \pm \frac{47}{128}\tau^3 \mp \frac{2353}{61440}\tau^5 \pm \frac{182461}{82575360}\tau^7\right)\cos(y) \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{33}{32}\,\tau^2-\frac{1611}{512}\,\tau^4+\frac{1035747}{327680}\,\tau^6\right)\sin(3\,y)$$
$$+\left(\pm\frac{1}{4}\,\tau\mp\frac{279}{128}\,\tau^3\pm\frac{14283}{4096}\,\tau^5\mp\frac{3194883}{1310720}\,\tau^7\right)\cos(3\,y)$$
$$+\left(-\frac{5}{32}\,\tau^2+\frac{6125}{1536}\,\tau^4-\frac{3565625}{196608}\,\tau^6\right)\sin(5\,y)$$
$$\pm\left(\frac{425}{384}\,\tau^3\mp\frac{239375}{24576}\,\tau^5\pm\frac{21578125}{786432}\,\tau^7\right)\cos(5\,y)$$
$$+\left(\mp\frac{49}{384}\,\tau^3\pm\frac{160867}{24576}\,\tau^5\mp\frac{231650881}{3932160}\,\tau^7\right)\cos(7\,y)$$
$$+\left(-\frac{7889}{6144}\,\tau^4+\frac{11075813}{491520}\,\tau^6\right)\sin(7\,y)$$
$$+\left(-\frac{334611}{32768}\,\tau^6+\frac{243}{2048}\,\tau^4\right)\sin(9\,y)$$
$$\pm\left(\frac{59462343}{1310720}\,\tau^7\mp\frac{63423}{40960}\,\tau^5\right)\cos(9\,y)+\cdots$$

4. Tą pačią sistemą spręsime konstruojant (4), (5) artinius. 1 lentelėje parodyti sutampantys ir nesutampantys dviem būdais apskaičiuoti polinomų koeficientai. Parametrų N ir M įtaka artinio tikslumui gali būti ištirta ir konstruojant teorinius įverčius. Tai yra mūsų tolimesnių tyrimų objektas.

5. Atkreiptinas dėmesys į Maple programos simbolinių skaičiavimų galimybes. Tarkime, kad (7) pradinė sąlyga pakeista tokia:

$$R^{\pm}(\tau,y^{\pm})\big|_{\tau=0}=h\,\sin\left(y^{\pm}\right).$$

Tada funkcijas $R^{\pm}$ galima išreikšti taip:

$$R^{\pm}(\tau,y^{\pm})=\left(\mp\left(h+\frac{1}{4}h^3\right)\tau\pm\left(\frac{1}{6}\,h+\frac{1}{8}\,h^3+\frac{1}{6}\,h^5+\frac{5}{384}\,h^7\right)\tau^3+\cdots\right)\cos\left(y^{\pm}\right)$$
$$+\left(h-\left(\frac{1}{2}\,h+\frac{1}{4}\,h^3+\frac{1}{16}\,h^5\right)\tau^2+\cdots\right)\sin\left(y^{\pm}\right)$$
$$+\left(\pm\left(\frac{1}{4}h^3\right)\tau\mp\left(\frac{9}{8}\,h^3+\frac{27}{32}\,h^5+\frac{27}{128}\,h^7\right)\tau^3+\cdots\right)\cos\left(3y^{\pm}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{3}{4}\,h^3+\frac{9}{32}\,h^5\right)\tau^2+\cdots\right)\sin\left(3y^{\pm}\right)+\cdots$$

6. Išvardykime atlikto tyrimo rezultatus ir numatomus tolimesnius darbus:

- Sukurta Maple programa leidžia konstruoti nagrinėjamos integralinės diferencialinės suvidurkintosios sistemos sprendinių artinius.

1 lentelė

		0	1	2	3	4	5	6	7
$N=3$, $M=3$	1	+	+	+	+	–	–	–	–
	3	+	+	+	–	–	–	–	–
$N=5$, $M=5$	1	+	+	+	+	+	+	–	–
	3	+	+	+	+	+	–	–	–
	5	+	+	+	+	–	–	–	–
$N=7$, $M=7$	1	+	+	+	+	+	+	+	+
	3	+	+	+	+	+	+	+	–
	5	+	+	+	+	+	+	–	–
	7	+	+	+	+	+	–	–	–
$N=9$, $M=9$	1	+	+	+	+	+	+	+	+
	3	+	+	+	+	+	+	+	+
	5	+	+	+	+	+	+	+	+
	7	+	+	+	+	+	+	+	–
	9	+	+	+	+	+	+	–	–
$N=11$, $M=11$	1	+	+	+	+	+	+	+	+
	3	+	+	+	+	+	+	+	+
	5	+	+	+	+	+	+	+	+
	7	+	+	+	+	+	+	+	+
	9	+	+	+	+	+	+	+	+
	11	+	+	+	+	+	+	+	–

- Atliktas programos testavimas nerezonansiniam atvejui, kai sistemą sudaro dvi nepriklausomos lygtys, kurių sprendiniai reiškiami neišreikštinėmis funkcijomis.
- Atliktas harmonikų skaičiaus ir polinomų laipsnio, reikalingų aproksimacijos tikslumui užtikrinti, tyrimas.
- Parodytos metodo galimybės gauti aproksimacines formules, esant neapibrėžtam parametrui uždavinio pradinėse sąlygose.
- Metodui plėtoti numatoma atlikti programos testavimą rezonansiniam atvejui, palyginti rezultatus su gautais skaitiniais metodais, gauti teorinius įverčius reikalingam harmonikų skaičiui ir polinomų laipsniui.

Literatūra

1. A. Krylovas. Substantiation of the method of internal averaging along the characteristics of weakly nonlinear systems. *Liet. Mat. Rink.*, 1(30):88–100, 1990.
2. A. Krylovas, P. Miškinis. Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniai svyravimai. Asimptotikų konstravimas. *Liet. Mat. Rink.*, 47(spec. nr.):123–127, 2007.
3. A. Krylovas, R. Čiegis. Asymptotic approximation of hyperbolic weakly nonlinear systems. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 8(4):458–470, 2001.
4. A. Krylovas, R. Čiegis. *Examples of Asymptotical Analysis of Hyperbolic Equations*. Mathematics in Industry-ECMI Subseries, Springer-Verlag, Heidelberg, 321–326, 2003.
5. A. Krylovas, R. Čiegis. A review of numerical asymptotic methods for weakly nonlinear hyperbolic waves. *Math. Model. Anal.*, 9(3):209–222, 2004.

6. A. Majda, R. Rosales, M. Schonbek. A canonical system of integro differential equations in nonlinear acoustics. *Stupid. Appl. Math.*, 79:205–262, 1988.
7. V.P. Maslov, P.P. Mosolov. *Equations of a One-dimensional Barotropic Gas*. Nauka, Moscow, 1990.
8. P. Miškinis. Netiesiniai ir nelokaliniai integruojamieji modeliai. *Technika*, 8(4):260, 2003.
9. V. Sharma, G.K. Srinivasan. Wave interaction in a nonequilibrium gas flow. *Int. J. of Non-linear Mech.*, 40:1031–1040, 2005.
10. A.L. Štaras. Asymptotic integration of weakly nonlinear partial differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 237:525–528, 1977.

SUMMARY

O. Lavcel, A. Krylovas. Analysis of asymptotics for a model of nonlinear oscillations of the absolute elastic weightless string

The mathematical model of string nonlinear oscillations is presented. To found the asymptotic solution of the problem an averaging scheme was constructed in cited latest work of the second author. In this paper a methodology for construction special form soliutions of the system is proposed.

Keywords: asymptotical methods, averaging, nonlinear waves, approximations.