Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 96–101

2009 m. Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Juozas Juvencijus MAČYS
Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, 08663 Vilnius
el. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Santrauka. Straipsnyje apžvelgiamos 58-osios Lietuvos mokinių matematikos olimpiados (2009 04 07, Druskininkai) užduotys ir jų sprendimo būdai.

Raktiniai žodžiai: matematikos olimpiados, uždavinių sprendimas.

Įvadas

Šiuo straipsniu tęsiama tradicija apžvelgti kiekvienų metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados užduotis ir panagrinėti jų sprendimo būdus. Pereitų metų olimpiados apžvalgą ir ankstesnių metų olimpiadų apžvalgų nuorodas galima rasti [4].

58-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada įvyko 2009 m. balandžio 7 d. Druskininkuose. Olimpiada buvo puikiai suorganizuota – mokiniams ir mokytojams buvo prieinami visi turistiniai ir kurortiniai malonumai. Olimpiadoje kiekvienas mokinys sprendė 4 uždavinius (9–10 ir 11–12 klasių uždaviniai skyrėsi). Suvedus olimpiados rezultatus, buvo atrinkti dalyviai ir kandidatai į Pasaulio matematikos olimpiadą (IMO), kuri šiemet vyko Brėmene (Vokietija) liepos mėnesį.

Mokytojai dar mokiniams tebesprendžiant gavo vertinimo komisijos parengtą uždavinių ir sprendimų knygelę (komisijos pirmininkas prof. A. Dubickas). Su visa medžiaga galima susipažinti internete ([3,2]). Šiais šaltiniais remiamasi ir mūsų apžvalgoje. Joje nagrinėjami tik įdomiausių uždavinių sprendimai. Likusių uždavinių sprendimus skaitytojas ras minėtuose šaltiniuose.

9–10 klasių uždaviniai

1. Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybę $28a + 30b + 31c = 365$.
a) Kelias reikšmes gali įgyti suma $a + b + c$?
b) Raskite visus šios lygties natūraliuosius sprendinius $(a; b; c)$.

Atsakymas. a) Vienintelę reikšmę 12. b) (1;4;7), (2;1;9).

Sprendimas. Panašiuose uždaviniuose sunku absoliučiai išvengti perrankos. Todėl visa gudrybė, kaip tą perranką kiek galima sumažinti. Pasirodo (žr. [3,2]), kad galima iš karto įsitikinti, jog $a + b + c = 12$ (pabandykite), ir perranka nebedidelė. Mes pademonstruosime kitą būdą, kai perrenkamos kintamųjų a, b, c (o ne sumos $a+b+c$) reikšmės.

Nuo kurio kintamojo ją pradėti? Žinoma, nuo c. Viena vertus, sąlygos lygybėje

$$28a + 30b + 31c = 365 \tag{1}$$

c koeficientas didžiausiais, todėl šio kintamojo rėžis iš viršaus mažiausias:

$$31c = 365 - 28a - 30b \leqslant 365 - 28 - 30,$$
$$31c \leqslant 307,$$
$$c \leqslant 9.$$

Kita vertus, vien žvilgtelėjus į (1) lygybę aišku, kad c nelyginis (kitaip kairė pusė būtų lyginė), todėl perrinkti reikės tik apie pusę reikšmių, $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Jei $c = 9$, tai iš (1) turime $28 + 30b = 86$, $14a + 15b = 43$. Aišku, kad čia $b < 3$ ir nelyginis, taigi $b = 1$, tada $a = 2$. Radome sprendinį $(1; 2; 9)$.

Jei $c = 7$, tai $28a + 30b = 148$, $14a + 15b = 74$, b lyginis, $b \leqslant 4$, todėl $b \in \{2, 4\}$. Jei $b = 4$, gauname $a = 1$, t.y. sprendinį $(1; 4; 7)$. Jei $b = 2$, tai $14a = 44$, sprendinių nėra.

Jei $c = 5$, tai $28a + 30b = 210$. Matome, kad b turi dalytis iš 7, todėl $b \geqslant 7$, bet tada $30b \geqslant 210$, ir sprendinių nėra.

Jei $c = 3$, tai $28a + 30b = 272$, $14a + 15b = 136$. Kadangi $15a + 15b = 135 + a + 1$, tai $a + 1$ turi dalytis iš 15. Vadinasi, $a + 1 \geqslant 15$, $a \geqslant 14$, ir sprendinių nėra.

Jei $c = 1$, tai $28a + 30b = 334$, $14a + 15b = 167$. Vadinasi, $15a + 15b = 150 + 15 + a + 2$, $a + 2$ turi dalytis iš 15, $a + 2 \geqslant 15$, $a \geqslant 13$, bet tada $14a \geqslant 182$, ir sprendinių nėra.

Perranka baigta.

Turime du sprendinius: $(1; 4; 7)$ ir $(2; 1; 9)$. Abiem atvejais $a + b + c = 12$.

Kitas būdas. Trumpą sprendimą gauname remdamiesi dalumu.

Kadangi $31(a + b + c) = 3a + b + 310 + 62 - 7$, tai $3a + b - 7$ dalijasi iš 31, t.y. $3a + b = 7, 38, 69, \ldots$. Bet jei $3a - b \geqslant 38$, tai $28a + 30b + 31c = 9(3a + b) + a + 21b + 31c \geqslant 9 \cdot 38 + 1 + 21 + 31 = 393$. Vadinasi, $3a + b = 7$, ir $a \leqslant 2$. Jeigu $a = 1$, tai $b = 4$, ir iš (1) $31c = 365 - 28 - 120$, $c = 7$. Jeigu $a = 2$, tai $b = 1$, tada $31c = 365 - 56 - 30$, $c = 9$.

Kiekvieno iš sprendinių $(1; 4; 7)$ ir $(2; 1; 9)$ komponenčių suma yra 12.

Galima būtų pasakyti, kad ir perrankos čia nebuvo.

2. Keturkampio $ABCD$ kraštinės AD ir CD lygios, $\angle BCD = 60°$, $\angle BAC = 30°$. Įrodykite, kad kraštinės BC ir CD taip pat lygios.

Pastaba. Sąlygoje geriau paminėti, kad keturkampis $ABCD$ iškilas, – kitaip teiginys neteisingas. Tiesa, niekas iš mokinių kitaip ir nepagalvojo, nes mokykloje neiškilieji keturkampiai beveik neminimi.

3. Kabineto forma yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė lygi 3 metrams. Kiekvienoje šešiakampio viršūnėje yra prietaisas, kuris rodo, kiek mokinių, nutolusių nuo jo ne didesniu kaip 3 metrų atstumu, miega. Kiek mokinių miega, jei visų šešių prietaisų rodmenų suma yra lygi 7?

Atsakymas. 3.

Sprendimas. Jeigu iš kiekvienos šešiakampio viršūnės išvestume spindulio 3 apskritimo lanką, tai šešiakampis būtų padalytas į tris sritis: vienoje jų yra vienintelis taškas – šešiakampio centras (jis priklauso visiems 6 uždariesiems skrituliams), antroje (6 žiedlapiuose) kiekvienas taškas priklauso trims skrituliams, trečioje (tarp žiedlapių) kiekvienas taškas priklauso 2 skrituliams. Apskritimais remiasi ir sprendimas iš [3,2].

Pateiksime sprendimą, kuriame neprireikia apskritimų. Sakykime, kad prietaisai yra taisyklingojo šešiakampio viršūnėse A, B, C, D, E, F, mokinys – taške M, O – šešiakampio centras, N – atkarpos AB vidurio taškas, P – atkarpos AO vidurio taškas (pasidarykite brėžinuką). Užtenka išnagrinėti atvejį, kai $M \in \Delta AOB$ (šešiakampį sudaro 6 analogiški trikampiai), o trikampiui AOB priklauso ir kraštinės. Jei M sutampa su O, tai M yra lygiai už 3 metrų nuo visų šešiakampio viršūnių, ir taške M miegantį mokinį matytų visi 6 prietaisai. Jei M nesutampa su O, tai taško M atstumai nuo A ir B ne didesni už 3: ΔABM kampai A ir B ne didesni už $60°$, kampas $M \geqslant 60°$, todėl $AM \leqslant AB$, $BM \leqslant AB$. Nuo taško M viršūnė E nutolusi daugiau nei 3: ΔEOM kampas $EOM > 120°$ didžiausias, todėl $EM > EO$. Lygiai taip pat $DM > 3$.

Kiekvienas iš atstumų CM ir FM gali būti tiek didesnis, tiek ir mažesnis už 3: pavyzdžiui, FP – lygiakraščio trikampio aukštinė, taigi taškai, artimi taškui P, nutolę nuo F atstumu mažesniu nei 3; FN pasviroji tiesei NO, o $FO = 3$ – statmuo, todėl $FN > 3$. Bet bent vienas iš atstumų CM ir FM tikrai didesnis už 3, nes remiantis trikampio nelygybe $CM + FM > CF = 6$.

Taigi miegantį mokinį gali užfiksuoti 2, 3, arba 6 prietaisai. Jeigu tokių mokinių atitinkamai yra a, b ir c, tai bendras rodmenų skaičius lygus $2a + 3b + 6c = 7$.

Aišku, kad $c \leqslant 1$, bet $c = 1$ būti negali, nes lygtis $2a + 3b = 1$ neneigiamų sprendinių neturi. Vadinasi, $c = 0$, taigi $2a + 3b = 7$. Tada $b \leqslant 2$, b nelyginis, todėl $b = 1$, ir $a = 2$. Taigi miegančių mokinių skaičius $a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3$.

4. Skaičius $1, 2, 3, \ldots, 4n$ reikia suskirstyti į n grupių po keturis skaičius taip, kad kiekvienoje grupėje vienas iš skaičių būtų lygus likusių trijų tos grupės skaičių aritmetiniam vidurkiui. Kuriems natūraliesiems n tai įmanoma?

Atsakymas. Lyginiams n.

11–12 klasių uždaviniai

1. Duoti trys skirtingi teigiami skaičiai a, b ir c. Įrodykite, kad kvadratinė lygtis

$$(a+b+c)x^2 + 2\Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\Big)x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

turi dvi skirtingas realias šaknis.

2. E ir F atitinkamai yra kvadrato $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidiniai taškai. Iš taško F tiesei AE išvestas statmuo ją kerta kvadrato įstrižainės BD taške G. Atkarpos FG vidinis taškas K yra toks, kad $AK = EF$. Raskite kampą $\angle EKF$.

Atsakymas. $\angle EKF = 135°$.

3. Žr. 9–10 klasių 3 uždavinį.

4. Natūralųjį skaičių N vadinkime *paslankiuoju*, jeigu jį galima užrašyti kelių (nebūtinai skirtingų) natūraliųjų skaičių suma taip, kad visų dėmenims atvirkštinių skaičių suma būtų lygi 1. Pavyzdžiui, 11 yra paslankusis skaičius, nes

$$11 = 2 + 3 + 6$$

ir

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

a) Įrodykite, kad 28 yra paslankusis skaičius.
b) Ar 58 yra paslankusis skaičius?
c) Ar 65 yra paslankusis skaičius?
d) Ar 2009 yra paslankusis skaičius?

Atsakymas. a) Taip. b) Taip. c) Taip. d) Taip.

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius N paslankus, t.y.

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}, \qquad N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Padalykime pirmą lygybę iš 2:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_n}.$$

Todėl

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_n} = 1,$$

o tai reiškia, kad skaičius

$$2 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_n = 2N + 2$$

taip pat paslankus.

Taip pat ir

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

todėl

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_n} = 1,$$

ir skaičius $3 + 6 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_n = 2N + 9$ paslankus.

Savo ruožtu tai reiškia štai ką. Jeigu skaičius $\frac{N-2}{2}$ yra sveikas ir paslankus, tai ir N yra paslankus. Jeigu skaičius $\frac{N-9}{2}$ yra sveikas ir paslankus, tai ir N yra paslankus.

a) Atspėti vieneto skleidinį, atitinkantį 28, paprasta „plečiant“ trupmenų sumas:

$$1 \overset{(4)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overset{(10)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \overset{(22)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \overset{(28)}{=} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

(skliausteliuose virš lygybės ženklo rašome skaičių N, atitinkantį dešiniau esantį skleidinį).

Beje, skaičius $\frac{28-2}{2} = 13$ jau nebėra paslankus (pabandykite šį teiginį įrodyti, – tai ne taip lengva).

b) Kadangi $\frac{58-2}{2} = 28$ paslankus, tai ir 58 paslankus.

c) Kadangi $\frac{65-9}{2} = 28$, o 28 – paslankus, tai ir 65 paslankus.

d) Kadangi $\frac{2009-9}{2} = 1000$, $\frac{1000-2}{2} = 499$, $\frac{499-9}{2} = 245$, $\frac{245-9}{2} = 118$, $\frac{118-2}{2} = 58$, $\frac{58-2}{2} = 28$, o skaičius 28 paslankus, tai ir skaičiai 58, 118, 245, 499, 1000, 2009 yra paslankūs.

1 pastaba. Įrodysime, kad skaičius 13 nepaslankus.

Skaičių 13 reikia išskaidyti į tokius dėmenis $2 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant \ldots$, kad $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$, $a_1 + a_2 + \ldots = 13$. Iš tikrųjų tų būdų užrašyti 13 kaip sumą ne taip jau daug, ir juos visus galima patikrinti. Pasirinkime malonesnį kelią. Pradėkime nuo didžiausio dėmens. Jis negali būti 13 (tada jis būtų vienintelis, bet $\frac{1}{13} < 1$), negali būti 12 (nes dėmens 1 nėra), negali būti 11 (nes kitas dėmuo būtų 2, o $\frac{1}{11} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$), negali būti 10 (nes $\frac{1}{10} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$).

Kita vertus, skaidinyje negali būti dviejų dvejetų ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$), trijų trejetų, trijų ketvertų (nes $3 \cdot 4 = 12$, ir lieka 1), dviejų penketų (liktų 3, bet $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} < 1$), dviejų šešetų (liktų 1), dviejų septynetų ar kitų didesnių vienodų dėmenų (nes $7 \cdot 2 > 13$). Vadinasi, iš lygybės

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 1$$

reikia išbraukti keletą dėmenų, kad ji taptų teisinga.

Išbraukti būtinai reikia $\frac{1}{9}$ – kitaip padauginę iš $8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ abi lygybės puses, gausime sveikus visus skaičius išskyrus vieną. Išbraukus $\frac{1}{9}$, būtinai reikia išbraukti ir $\frac{1}{8}$ – kitaip dauginame iš $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ir lieka vienintelė trupmena. Dabar reikia išbraukti $\frac{1}{7}$ – kitaip dauginame iš 6! ir lieka vienintelė trupmena. Dabar išbraukti reikia $\frac{1}{5}$ (dauginame iš 4!). Liko lygybė

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1.$$

Joje reikia arba palikti abu ketvertus, arba abu išbraukti (kitaip dauginame iš 6). Jei ketvertus paliekame, tai iki 13 lieka $2 + 3$, bet $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > 1$. Jei ketvertus išbraukiame, tai lieka lygybė

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Vardiklių suma 14, todėl palikti visų keturių dėmenų negalima, o kurį nors išbraukus – vardiklių suma bus mažesnė už 13.

Vadinasi, skaičius 13 nepaslankus.

Beje, pasekite, kodėl toks įrodymas netinka skaičiui 17.

2 pastaba. Pasirodo, kad atliekant minėtas operacijas su skaičiumi $N \geqslant 57$ visada galima gauti skaičių iš intervalo $[24, 56]$. Kadangi visi šio intervalo skaičiai paslankūs (tuo įsitikinti nesunku su kompiuteriu), tai visi $N \geqslant 24$ paslankūs. Lieka skaičiai $N < 24$, ir pasirodo (vėl kompiuteris), kad nepaslankūs yra tik skaičiai

$$2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 23.$$

Ši tema yra puikus pavyzdys, ką galėtų tirti mokinys su kompiuteriu ar be jo, – darbo čia yra visokio. Daugiau žinių šia tema galima rasti internete [1].

Literatūra

1. *Aufgaben und Lösungen, 1 Runde 2008*. www.bundeswettbewerb-mathematik.de.
2. A. Dubickas. 2009 m. Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai. www.mif.vu.lt/dubickas.
3. A. Dubickas. 2009 m. Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai. www.olimpiados.lt.
4. J. Mačys. Lietuvos moksleivių olimpiados 08 uždavinių apžvalga. *Liet. matem. rink.*, 48/49(spec. nr.):115–119, 2008.

SUMMARY

J.J. Mačys. School mathematical olympiad-2009

The texts and solutions of the Lithuanian school mathematical olympiad-2009 are presented.

Keywords: mathematical olympiads, problem solving.