Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 129–133

Trigonometrinės funkcijos vidurinėje mokykloje

Petras VAŠKAS
Vilniaus universitetas, Matematios ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
el. paštas: petras.vaskas@mif.vu.lt

Santrauka. Dabartinis pagrindinės mokyklos planimetrijos kursas baigiamas „trikampių sprendimu“. Tam prireikia: 1) smailiojo kampo trigonometrinių funkcijų (jos apibrėžiamos panaudojant statųjį trikampį); 2) bukojo kampo trigonometrinių funkcijų (jos apibrėžiamos jau kitaip – panaudojant koordinačių sistemą). Siekiant vieningesnio tų funkcijų apibrėžimo, ir kitus žinomus teiginius (ne visų įrodymus pateiksime) suformuluosime kitaip.

Raktiniai žodžiai: kampo sinusas, kampo kosinusas, kosinusų teorema, Pitagoro teorema, redukcijos formulės, trigonometrinės funkcijos, trikampio plotas.

Trikampio plotas

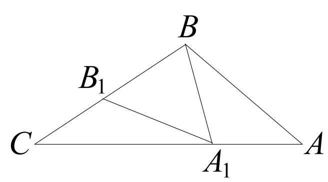
TEOREMA. *Trikampio plotas lygus pusei jo kraštinės ir ją atitinkančios aukštinės ilgių sandaugos.*

Pastaba. Čia laikome „savaime suprantamu“ (aksioma), kad trikampio plotas nepriklauso nuo to, kurią kraštinę jį skaičiuodami pasirinksime.

TEOREMA. *Jei dviejų trikampių aukštinių, atitinkančių dvi tų trikampių kraštines, ilgiai yra lygūs, tai tų trikampių plotų santykis yra lygus tų kraštinių ilgių santykiui.*

TEOREMA. *Trikampio plotas yra tiesiogiai proporcingas dviejų jo kraštinių ilgių sandaugai.*

Įrodymas. Nagrinėkime trikampius ABC ir A_1B_1C, turinčius bendrą kampą C (1 pav.).



1 pav.

Kadangi trikampių ABC ir A_1B_1C (1 pav.) aukštinė iš viršūnės B yra ta pati, tai jų plotų santykis

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BC}} = \frac{CA}{CA_1}.$$

Kadangi trikampių A_1BC ir A_1B_1C aukštinė iš viršūnės A yra ta pati, tai jų plotų santykis

$$\frac{S_{A_1BC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{CB}{CB_1}.$$

Gautąsias lygybes sudauginę, gauname:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C}} = \frac{CA \cdot CB}{CA_1 \cdot CB_1}.$$

Vadinasi, $S_{ABC} = k \cdot CA \cdot CB$, o k priklauso tik nuo kampo C.

Panašieji trikampiai

TEOREMA. *Tiesė, lygiagreti su trikampio kraštine, neinanti per jo viršūnę ir kertanti kitas dvi jo kraštines, atkerta nuo jo trikampį, kurio kampai lygūs pradinio trikampio kampams, o kraštinės proporcingos pradinio trikampio kraštinėms.*

Įrodymas. Tarkime, kad B_1C_1 ir BC (2 pav.).

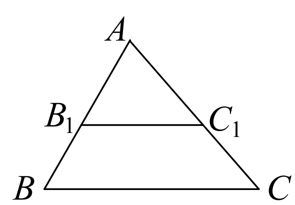
Trikampių AB_1C_1 ir ABC: $\angle A$ – bendras, $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$, $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$ (dviejų lygiagrečiųjų tiesių, perkirstų trečiąja tiese, atitinkamieji kampai).

Remdamiesi trikampių, turinčių po lygų kampą. plotų santykio teorema, gauname:

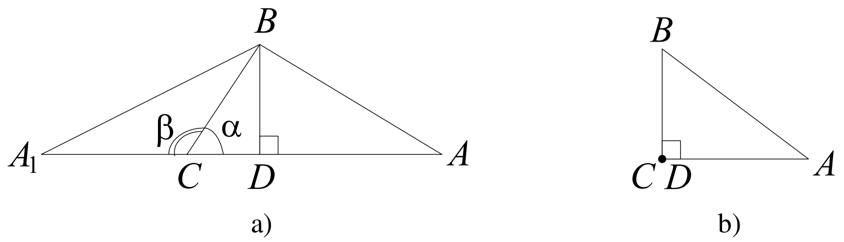
$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{B_1A \cdot B_1C_1}{BA \cdot BC} = \frac{C_1A \cdot C_1B_1}{CA \cdot CB} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC},$$

o iš čia:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$



2 pav.



3 pav.

APIBRĖŽIMAS. Kai trikampio $A_1B_1C_1$ kampai lygūs trikampio ABC kampams ($\angle A_1 = \angle A,\ \angle B_1 = \angle B,\ \angle C_1 = \angle C$), o atitinkamos (prieš lygius kampus esančios kraštinės) yra proporcingos:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{A_1B_1}{AB} = k,$$

sakoma, kad trikampis $A_1B_1C_1$ yra panašus į trikampį ABC, o skaičius k yra to panašumo koeficientas.

Kampo sinusas. Trikampio ploto formulė

Atsižvelgę į tai, kad

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \frac{BD}{CB}, \quad S_{A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot CA_1 \cdot CB \cdot \frac{BD}{CB} \quad \text{(3 pav., a)},$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \frac{BD}{CB} \quad \text{(3 pav., b)},$$

kampo sinusą apibrėžiame šitaip:

smailiojo kampo α ($0° < \alpha < 90°$) sinusas $\sin\alpha = \frac{BD}{CB}$ (3 pav., a);

bukojo kampo $\beta = 180° - \alpha$ ($90° < \alpha < 180°$) sinusas $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin 90° = 1$.

Tokiu atveju trikampio ploto formulė yra $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin C$.

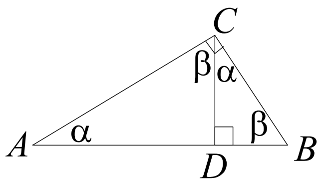
Pitagoro teorema

TEOREMA. *Stačiojo trikampio įžambinės ilgio kvadratas yra lygus statinių ilgių kvadratų sumai.*

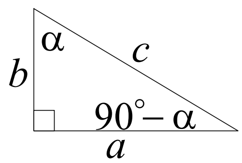
Įrodymas. Iš 4 pav.:

$$\sin\beta = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}, \quad AD \cdot AB = AC^2; \quad \sin\alpha = \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}, \quad DB \cdot AB = BC^2.$$

Lygybes sudėję ir pakeitę $AD + DB = AB$, gauname $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



4 pav.



5 pav.

Kampo kosinusas. Kosinusų teorema

Iš 4 pav., pritaikę Pitagoro teoremą, gauname:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 = (AC - CD)^2 + BC^2 - CD^2 \\ &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \frac{CD}{BC}, \\ A_1B^2 &= A_1D^2 + BD^2 = (A_1C + CD)^2 + BC^2 - CD^2 \\ &= A_1C^2 + BC^2 - 2A_1C \cdot BC \cdot \left(-\frac{CD}{BC}\right) \quad \text{(3 pav., a);} \\ AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \frac{CD}{BC} \quad \text{(3 pav., b),} \end{aligned}$$

todėl kampo kosinusą apibrėžiame šitaip:

smailiojo kampo α $(0° < \alpha < 90°)$ kosinusas: $\cos\alpha = \frac{CD}{BC}$ (3 pav., a);

bukojo kampo $\beta = 180° - \alpha$ $(90° < \beta < 180°)$ kosinusas $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$; $\cos 90° = 0$.

Lygybė

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$$

išreiškia kosinusų teoremą.

Redukcijos formulės

Iš 5 pav.:

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha.$$

Bukąjį kampą β galima išreikšti suma $90^\circ + \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.
Tada

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(180^\circ - (90^\circ - \alpha)) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(180^\circ - (90^\circ - \alpha)) = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha.$$

SUMMARY

P. Vaškas. Trigonometric functions in the secondary school

In the school mathematics trigonometric functions for acute angle and obtuse angle are defined differently. The common definitions of trigonometric functions for the both cases in the paper are proposed.

Keywords: area of a triangle, cosine of the angle, Pythagorean theorem, reduction formulas, sine of the angle, theorem of cosines, trigonometric functions.