Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 322–327

Barjero pasirinkimo sandorių įkainojimo metodų tyrimas

Rita PALIVONAITĖ, Eimutis VALAKEVIČIUS
Kauno technologijos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
el. paštas: rita.palivonaite@ktu.lt; eimval@ktu.lt

Santrauka. Darbe nagrinėjami du skaitiniai barjero pasirinkimo sandorių įkainojimo metodai: trinominis ir adaptyviojo tinklelio. Gauti rezultatai lyginami su teorine Black–Scholes formule. Tyrimai, atlikti su Lietuvos firmos akcijos kainomis parodė, kad modeliuojant akcijų kainas kartais geriau nedidinti modeliavimo žingsnių skaičiaus, o "smulkinti" tinklelį kritinėse trinominio medžio vietose.

Raktiniai žodžiai: barjero pasirinkimo sandoris, trinominis metodas, adaptyviojo tinklelio metodas.

1. Įvadas

Pastaruoju metu finansų rinkose yra populiarios įvairios išvestinės finansinės priemonės: ateities, pasikeitimo, pasirinkimo ir kt. sandoriai. Labiausiai paplitę yra europietiškojo tipo pasirinkimo sandoriai, kurie suteikia teisę, bet ne pareigą, už iš anksto sutartą kainą ateityje pirkti ar parduoti finansinį aktyvą, paprastai akcijas. Tačiau įprastiniai pasirinkimo sandoriai yra nelankstūs ir brangūs. Finansų inžinerija siūlo specialaus tipo pasirinkimo sandorius, vadinamus egzotiniais. Šie sandoriai, įtraukus papildomas sąlygas, leidžia gauti panašaus dydžio išmokas, kaip ir europietiškieji, tačiau mažesniais kaštais [2]. Pasaulinėse rinkose vieni labiausiai paplitusių egzotinių sandorių yra barjero pasirinkimo sandoriai. Jų išmokos priklauso nuo jų pagrindą sudarančių akcijų indekso istorinių duomenų per sandorio galiojimo laiką. Barjero pasirinkimo sandoriai yra artimi įprastiniams pasirinkimo sandoriams, išskyrus tai, kad įvedamas naujas kintamasis - barjeras.

Jei per sandorio laiką kintanti akcijos kaina pasiekia iš anksto nustatytą barjero reikšmę B, galimas vienas iš tokių atvejų:

- pasirinkimo sandoris nustoja galioti;
- pasirinkimo sandoris tampa veiksmingas, t.y. galiojantis.

Šio straipsnio tikslas ištirti ir palyginti skaitinius barjero pasirinkimo sandorio įkainojimo metodus: trinominį ir adaptyviojo tinklelio ir gautus rezultatus palyginti su teorine Black–Scholes formule. Nagrinėsime pasirinkimo sandorio atvejį, kai barjeras yra žemiau pradinės akcijos kainos (sandorio tipas *down*) ir jo pasiekti negalima (sandorio tipas *out*), o įvykdymo kaina yra virš barjero.

2. Black–Scholes barjero pasirinkimo sandorio įkainojimo formulė

Teorinės barjero pasirinkimo sandorių įkainojimo formulės išvestos Black–Scholes teorijos pagrindu ir paskelbtos straipsnyje [4]. Laikoma, kad akcijų kainų grąžų logaritmai pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, nepastovumo parametras ir nerizikingoji palūkanų norma – konstantos, t.y. nekinta per visą sandorio galiojimo laikotarpį. Teorinė *down-and-out* pasirinkimo sandorio įkainojimo formulė:

$$\begin{aligned} C_{do}|B \leqslant X = S_0 e^{-dT}\Phi(x_1) - Xe^{-rT}\Phi(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-dT}\left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\lambda}\Phi(y_1) \\ - Xe^{rT}\left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\lambda-2}\Phi(y_1 - \sigma\sqrt{T}), \end{aligned}$$

čia: $x_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{B})}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$, $y_1 = \frac{\ln(\frac{B}{S_0})}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$, $\lambda = \frac{r-d+0.5\sigma^2}{\sigma^2}$;

S_0 – pradinė akcijos kaina, X – įvykdymo kaina, d – dividendai, T – sandorio galiojimo laikas, B – barjero lygis, σ – akcijos kainos nepastovumo parametras, r – nerizikingoji palūkanų norma, $\Phi(x)$ – normaliojo skirstinio funkcija.

Čia pateiktą modelį ne visada galime naudoti, nes teorinės įkainojimo formulės išvestos laikantis prielaidos, kad aktyvo kaina per visą pasirinkimo sandorio galiojimo laiką stebima tolydžiai, t.y. nepertraukiamai. Tačiau paprastai rinkose to įgyvendinti beveik neįmanoma, nes akcijos kaina stebima diskrečiais laiko momentais. Todėl tikslinga nagrinėti diskrečiuosius pasirinkimo sandorių įkainojimo modelius ir juos taikyti barjero pasirinkimo sandoriams.

3. Trinominis modelis

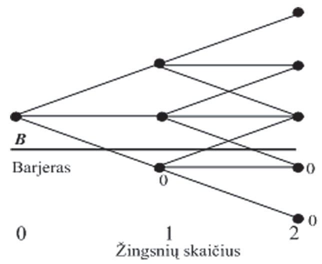
Trinominiame modelyje akcijos kaina generuojama trimis kryptimis. Tarkime, kad per kiekvieną laiko intervalą Δt akcijos kaina gali padidėti daugikliu $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, su tikimybe p_u, sumažėti daugikliu $d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, su tikimybe p_d, arba visiškai nesikeisti su tikimybe $p_m = 1 - p_u - p_d$:

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t u = S_t \mathrm{e}^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{su tikimybe } p_u, \\ S_t, & \text{su tikimybe } p_m, \\ S_{t+\Delta t} = S_t e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{su tikimybe } p_d. \end{cases}$$

Tikimybių išraiškos gaunamus sulyginus trinominio ir lognormaliojo (nes laikomasi prielaidos, kad akcijų kainų gražų logaritmai pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį) pirmuosius centrinius momentus, bei pasinaudojant rizikos neutralumo prielaida, jog vidutinė aktyvų pelno norma lygi nerizikingąjai pelno normai. Tuomet paliekant tik pirmos eilės narius, gaunamos tikimybių išraiškos:

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r - \sigma^2/2}{\lambda\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}, \quad p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r - \sigma^2/2}{\lambda\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}, \quad p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Knygoje [3] pasiūlyta parametro λ reikšmė $\lambda = \sqrt{3/2}$. Tuomet simetriškame trinominiame medyje bazinio aktyvo kaina kyla arba krinta proporcingai dydžiams:



1 pav. *Down-and-out* pasirinkimo sandorio dviejų žingsnių trinominis modelis.

$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t/2}}$ ir $d = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t/2}}$. Be galo didinant žingsnių skaičių, t.y. kai $\Delta t \to 0$, visos tikimybės artėja į reikšmę $1/3$.

Barjero pasirinkimo sandoriams reikia įvertinti dar vieną kintamąjį – barjero lygį B, kuris paprastai nesutampa su trinominiame modelyje sugeneruotomis akcijos kainomis, todėl netiksliai įkainojamas sandoris. 1 pav. pavaizduota *down-and-out* tipo pasirinkimo sandorio dviejų žingsnių trinominio medžio struktūra. Matome, jog barjero lygis B nesutampa su sugeneruotų akcijos kainos viršūnių eile, todėl tikruoju barjeru, įkainojant *down-and-out* tipo sandorį, laikoma pirmoji žemiau esanti viršūnių eilė. Kadangi šio tipo pasirinkimo sandoris nustoja galioti, kai akcijos kaina nukrinta žemiau barjero lygio, įkainojant žemiau esančioms viršūnėms priskiriamos nulinės reikšmės.

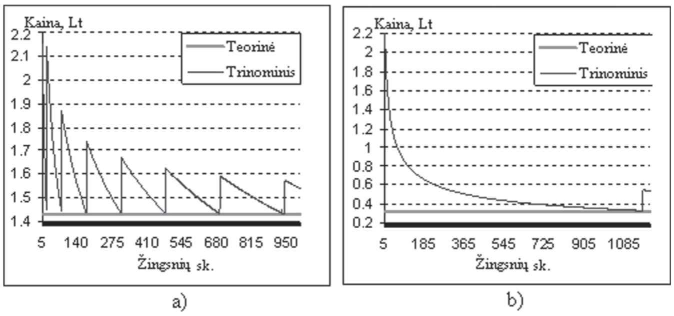
Kad barjero pasirinkimo sandoris būtų įkainojamas kuo tiksliau, vienas iš sprendimo būdų yra parinkti tokį laiko žingsnių skaičių, kad tikrasis barjeras būtų kuo arčiau, arba net sutaptų su viena iš viršūnių eilių. Skyrelio pradžioje buvo pažymėta, kad akcijos kaina didėja proporcingai dydžiui d. Galime parinkti tokią d reikšmę, kad galiotų sąlyga $d^n S_0 = B$, kai $n = 1, 2, 3, \ldots$, čia n – viršūnių eilės numeris, skaičiuojant nuo pradinės viršūnės žemyn. Galutinai, įrašę d išraišką, gausime lygtį $e^{n\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} S_0 = B$. Parametras λ bus lygus: $\lambda = \ln(S_0/B)/n\sigma\sqrt{\Delta t}$. Pasirenkant n siekiama, kad parametras λ kiek galima mažiau skirtųsi nuo reikšmės $\lambda = \sqrt{3/2}$.

4. Trinominio metodo realizacija

Barjero pasirinkimo sandorių modelių nagrinėjimui parametrus pasirinksime pagal konkrečios akcijos kainų istorinius duomenis. "Aprangos" APG1L akcija buvo stebėta 90 prekybos dienų: nuo 2007.01.02 d. iki 2007.05.30 d. Turėdami visų dienų uždarymo kainas, apskaičiuojame kiekvienos dienos pelno normas, ir tikriname jų pasiskirstymą. Tam, kad galėtume taikyti Black–Scholes įkainojimo modelį, pelno normos turi būti pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį [5]. Taip pat naudodamiesi šiais duomenimis, įvertinsime nepastovumo parametrą σ. Nerizikingąją palūkanų normą atitinka to laikotarpio valstybės iždo vekselių palūkanų normos. Gauname parametro įvertį $\widehat{\sigma} = 0,33$, arba 33%. Nerizikingoji palūkanų norma (valstybės iždo vekselių palūkanų norma 2007 m.) $r = 4,18\%$. Tarkime, kai pasirašome, pradinė akcijos kaina $S_0 = 17$ Lt. Kitus į pasirinkimo sandorio įkainojimo formulę įeinančius parametrus galima pasirinkti laisvai, sandorio pasirašymo metu. Jie pavaizduoti 1 lentelėje.

1 lentelė. Pasirinkimo sandorio parametrai

Pradinė akcijos kaina S_0, Lt	Įvykdymo kaina X Lt	Nepastovumo parametras σ, %	Galiojimo laikas T, metai	Nerizikingoji palūkanų norma r, %
17	17	33	1	4,18



2 pav. Pasirinkimo sandorio kaina gauta trinominiu metodu su barjeru a) 15,50 Lt; b) 16,80 Lt.

Toliau ištirsime barjero dydžio įtaką pasirinkimo sandorio kainai. Nagrinėsime pasirinkimo pirkti sandorį su 1 lentelės parametrais ir papildomu kintamuoju – laisvai pasirenkamu barjero lygiu B. Pasirinkome *down-and-out* tipo pasirinkimo pirkti sandorį, t.y. kuomet barjeras yra žemiau pradinės akcijos kainos ir per visą laikotarpį iki sandorio pabaigos jo pasiekti negalima, kitaip sandoris negalios.

2 pav. pateiktas trinominio modelio realizacijos rezultatų palyginimas su teorine kaina.

Kaip matome, konvergavimas yra "dantytas", esant tam tikram žingsnių skaičiui trinominiu metodu apskaičiuota reikšmė priartėja prie teorinės ir vėl "nušoka". Kuo mažesnis skirtumas tarp pradinės akcijos kainos, tuo lėčiau artėjama į teorinį kainą. Todėl norint tiksliau įvertinti sandorį tikslingiau parinkti tokį žingsnių skaičių, kad barjero lygis kiek galima būtų artimesnis viršūnių eilei. Žingsnių skaičius pasirinkimo sandoriui pagal 1 lentelės duomenis įkainoti įvairioms barjero reikšmėms pateiktas 2 lentelėje.

Norėdami tiksliau įvertinti pasirinkimo sandorio kainą diskrečiuose modeliuose turime didinti laiko intervalų Δt skaičių, kiekviename žingsnyje generuodami naujas medžio viršūnes. Ypatingai daug žingsnių reikia tiksliai įvertinti pasirinkimo sandorio kainą, kai pradinė akcijos kaina mažai skiriasi nuo barjero lygio (2 lentelė).

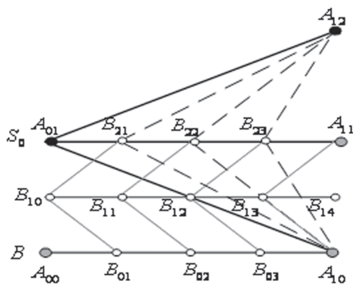
5. Adaptyviojo tinklelio metodas ir realizacija

Adaptyviojo tinklelio (AT) metodas taikomas diskrečiuose pasirinkimo sandorių įkainojimo modeliuose. Šiuo metodu siūloma smulkinti tinklelį kritinėse medžio vietose, nedidinant žingsnių skaičiaus ir negeneruojant naujų viršūnių eilių, pvz., 2 lentelė. Žingsnių skaičius trinominiame modelyje, kai $S_0 = 17$

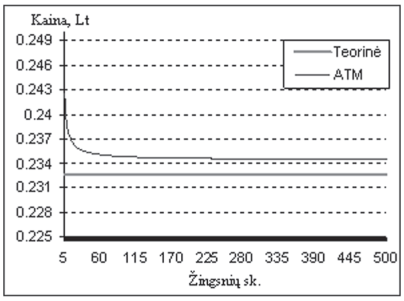
Barjeras B	Po 1 virš. eil.	Po 2 virš. eil.	Po 3 virš. eil.	Po 4 virš. eil.	Po 5 virš. eil.	Po 6 virš. eil.
15,50	19	76	172	306	478	689
16	44	178	400	711	1111	1600
16,50	183	733	1650	2933	4582	6599
16,70	515	2061	4638	8245	12882	18551
16,80	1166	4665	10497	18661	29158	41988

įprastiniams pasirinkimo sandoriams smulkinama paskutinioji sugeneruotų viršūnių eilė. Barjero pasirinkimo sandoriams, kaip buvo minėta 3 skyriuje, generuojant akcijų kainas, barjero lygis B nesutampa su medžio viršūnių eile. Todėl šio tipo sandoriams kritinės sritys – viršūnių eilės, tarp kurių patenka barjero B reikšmė. Šį metodą taikysime, kuomet pradinė akcijos kaina yra arti pasirinkto barjero B reikšmės, nes tuomet, kad priartėtume prie teorinės kainos reikšmės, reikia generuoti didelį skaičių medžio viršūnių, o tai reikalauja didelių kompiuterinių resursų.

Viršūnių skaičiavimo algoritmas pateikiamas 3 pav. Pirmiausiai, sukonstruojamas trinominis medis ir suskaičiuojamos viršūnių reikšmės, pažymėtos A_{ij}, čia i – laiko intervalo žingsnis, o j – kainos žingsnis aukštyn nuo pradinės reikšmės. Smulkesniojo medžio viršūnės pažymėtos B_{ij}, čia i - laiko intervalo Žingsnis, o j – kainos žingsnis aukštyn nuo pradinės akcijos kainos. Barjero lygį atitinka B_{0j} viršūnių eilė. B_{1j} eilė susmulkina kainos žingsnį h per pusę, taip papildomai pridedama viršūnių eilė. Tam, kad suskaičiuotume pradinę akcijos kainą B_{10}, pirmiausiai apskaičiuojame visas viršūnių reikšmes, pažymėtas A_{ij}, toliau suskaičiuojame viršūnes B_{0j} ir B_{2j}, esančias kas $1/4$ laiko intervalo dalį, t .y. $\Delta t/4$. B_{1j} viršūnės apskaičiuojamos naudojantis apskaičiuotomis viršūnių reikšmėmis B_{0j} ir B_{2j}, skaičiuojant kas laiko žingsnį $\Delta t/4$ ir kainos žingsnį $h/2$. Apskaičiuotoji B_{10} reikšmė bus kainos įvertis AT metodu [1].



3 pav. Adaptyviojo tinklelio schema barjero pasirinkimo sandoriui.



4 pav. Pasirinkimo sandorio kaina gauta AT metodu su barjeru 16,80 Lt.

4 pav. vaizduojama AT metodo realizacijos, kuomet barjero lygis yra arti pradinės akcijos kainos. Rezultatai gauti modeliuojant pagal 2 lentelės parametrus, su barjeru $B = 16,80$ Lt.

Net esant nedideliam žingsnių skaičiui, AT metodu įkainota vertė mažai skiriasi nuo teorinės. Kad panašų tikslumą gautume trinominiu metodu, pvz. iki pirmojo kainos šuolio, turėtume sugeneruoti medį su dideliu žingsnių skaičiumi: 1166. O norint įkainoti dar tiksliau, pvz. iki šeštojo kainos šuolio, reikėtų 41988 laiko žingsnių. Tai pareikalautų didelių kompiuterinių resursų.

6. Išvados

- Barjero pasirinkimo sandorių įkainojimo tikslumui įtaką turi barjero ir pradinės bazinio aktyvo kainos skirtumas. Kuo šis skirtumas didesnis, tuo tiksliau įkainojamas sandoris.
- Barjero pasirinkimo sandoris, kuomet barjeras yra žemiau pradinės bazinio aktyvo kainos ir jo pasiekti negalima, įkainojamas tiksliau, kai skirtumas tarp barjero lygio B ir pirmos žemiau esančios eilės yra mažesnis.
- Adaptyviojo tinklelio modelis taikytinas, kai santykinis skirtumas tarp barjero reikšmės ir pradinės bazinio aktyvo kainos yra nedidelis, t.y. apie 1%.

Literatūra

1. S. Figlewski, B. Gao. The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. *Journal of Finance Economics*, 53:313-351, 1999.
2. A. Juozapavičienė. *Išvestiniai instrumentai tarptautinėse finansų rinkose*. Technologija, Kaunas, 2006.
3. J. London. *Modelling Derivatives in C++*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2005.
4. E. Reiner, M. Rubinstein. Breaking down the barriers. *Risk*, 8(4):28–35, 1991.
5. E. Valakevičius. *Investicijų mokslas*. Technologija, Kaunas, 2005.

SUMMARY

R. Palivonaitė, E. Valakevičius. Investigation of the barrier options pricing models

In the article three methods of barrier option pricing are analysed and compared: Black–Scholes, trinomial ant adaptive mesh algorithm. Investigation with Lithuanian firm's stock showed, that to get better results it is offered to adapt higer resolution mesh on critical regions of trinomial tree.

Keywords: barrier option, trinomial tree, adaptive mesh algorithm.