Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 368–373

Rekurentinis algoritmas spektrui įvertinti

Kazys KAZLAUSKAS[1,2], Jaunius KAZLAUSKAS[1], Gintarė PETREIKYTĖ[1]
[1] Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
[2] Vilniaus Pedagoginis universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius
el. paštas: kazlausk@ktl.mii.lt

Santrauka. Pasiūlytas rekurentinis algoritmas spektrui įvertinti. Nagrinėjamas algoritmo efektyvumas bei pateikiami eksperimento rezultatai.

Raktiniai žodžiai: spektro įvertinimas, atvirkštinė matrica, rekurentinis algoritmas.

1. Įžanga

Didelės skiriamosios gebos spektro įverčiai naudojami sprendžiant akustikos, ryšių, radiolokacijos, biomedicinos ir kitus uždavinius. Spektro minimalios dispersijos įverčiai turi gerą skiriamąją gebą, tačiau jų panaudojimas praktiniuose taikymuose yra ribotas dėl skaičiavimų sudėtingumo, nes reikia skaičiuoti didelės dimensijos atvirkštinę kovariacinę matricą. Vienas iš būdų efektyviau spręsti spektro įvertinimo uždavinį – panaudoti kovariacinės matricos artimos Tioplico matricai savybę ir atvirkštinę matricą skaičiuoti rekurentiškai. Toks algoritmas apskaičiuoja visus tiesinės prognozės tarpinių eilių parametrus, todėl jei jie reikalingi – nebūtini papildomi skaičiavimai. Spektrą įvertindami rekurentiškai, išsaugome didelę skiriamąją gebą ir sumažiname skaičiavimų sudėtingumą.

2. Minimalios dispersijos spektro įvertis

Tarkime, kad turime M reikšmių diskretinį kompleksinį signalą $y(m)$, $1 \leqslant m \leqslant M$. Mažiausiųjų kvadratų minimalios dispersijos spektro įvertinimas grindžiamas ribotos impulsinės reakcijos tiesinės prognozės filtrais

$$f(m) = \sum_{j=0}^{n} a_n(j) y(m-j), \tag{1}$$

$$g(m) = \sum_{j=0}^{n} b_n(j) y(m-n+j), \quad m = n+1, \ldots, M, \tag{2}$$

čia $a_n(j)$ – tiesioginės krypties filtro parametrai, $b_n(j)$ – atgalinės krypties filtro parametrai, $f(m)$ – tiesioginės krypties filtro prognozės paklaida, $g(m)$ – atgalinės krypties filtro prognozės paklaida, n – filtrų eilė; $a_n(0) = b_n(0) = 1$. Filtrų (1) ir (2) išėjimus galime apskaičiuoti intervale $n+1 \leqslant m \leqslant M$. Tiesioginės krypties prognozės filtro išėjimo paklaidos dispersija

$$\sigma_n^f = \frac{1}{M-n} \sum_{m=n+1}^{M} \left| f(m) \right|^2, \tag{3}$$

o atgalinės krypties prognozės filtro išėjimo paklaidos dispersija

$$\sigma_n^g = \frac{1}{M-n} \sum_{m=n+1}^{M} \left| g(m) \right|^2. \tag{4}$$

Minimizuodami prognozės filtro išėjimo dispersiją, gauname mažiausiųjų kvadratų minimalios dispersijos spektro įvertį [2]

$$P(f) = \frac{T}{\mathbf{e}_n^H(f)\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{e}_n(f)}, \tag{5}$$

čia $\mathbf{e}_n^T(f) = (1, \exp(j2\pi fT), \ldots, \exp(j2\pi fnT))$, T – signalo diskretizavimo intervalas, f – dažnis $(-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T)$, "^{H}" – ermito transponavimo ženklas, "^{T}" – matricos transponavimo ženklas, $\mathbf{K}_n$ – kovariacinė matrica

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{Y}_n^H \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} k_n(0,0) & \ldots & k_n(0,n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_n(n,0) & \ldots & k_n(n,n) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

čia $k_n(i,j) = \sum_{m=n+1}^{M} y^*(m-i)y(m-j)$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, "$*$" – kompleksinio jungtinumo ženklas; $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n^H$,

$$\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y(n+1) & \ldots & y(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y(M) & \ldots & y(M-n) \end{pmatrix}.$$

Kovariacinė matrica $\mathbf{K}_n$ nėra Tioplico, tačiau ji yra artima Tioplico matricai, nes sudaryta iš dviejų Tioplico matricų sandaugos, todėl panaudosime šią savybę ir matricos $\mathbf{K}_n^{-1}$ elementus apskaičiuosime rekurentiškai.

3. Spektro įvertinimo rekurentinio algoritmo kūrimas

Matricos $\mathbf{K}_n$ elementus suskirstome į dalis:

$$\mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{K}'_{n-1} & \mathbf{k}'_n \\ \mathbf{k}'^H_n & k_n(n,n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

ir

$$\mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} k_n(0,0) & \mathbf{k}''^H_n \\ \mathbf{k}''_n & \mathbf{K}''_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

čia

$$\mathbf{k}_n^{'H} = \big(k_n(n,0),\dots,k_n(n,n-1)\big), \quad \mathbf{k}_n^{''H} = \big(k_n(0,1),\dots,k_n(0,n)\big),$$

$$\mathbf{K}_n' = \sum_{m=n+2}^{M} \mathbf{y}_n^*(m)\mathbf{y}_n^T(m) = \mathbf{K}_n - \mathbf{y}_n^*(n+1)\mathbf{y}_n^T(n+1), \quad \mathbf{K}_{n-1}' = \mathbf{K}_{n-1}^{'H},$$

$$\mathbf{K}_n'' = \sum_{m=n+1}^{M-1} \mathbf{y}_n^*(m)\mathbf{y}_n^T(m) = \mathbf{K}_n - \mathbf{y}_n^*(M)\mathbf{y}_n^T(M), \quad \mathbf{K}_{n-1}'' = \mathbf{K}_{n-1}^{''H},$$

$$\mathbf{y}_n^T(m) = \big(y(m),\dots,y(m-n)\big).$$

Minimizuodami tiesioginės krypties prognozės filtro išėjimo paklaidos dispersiją σ_n^f (3), gauname [4], kad

$$\mathbf{K}_n \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n^f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

čia $\mathbf{a}_n^T = (a_n(1),\dots,a_n(n))$, $\mathbf{0}$ – n-matis nulių stulpelis, o minimizuodami atgalinės krypties prognozės filtro išėjimo paklaidos dispersiją σ_n^g (4), gauname, kad

$$\mathbf{K}_n \begin{pmatrix} \mathbf{J}\mathbf{b}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma_n^g \end{pmatrix}, \tag{10}$$

čia $\mathbf{b}_n^T = (b_n(1),\dots,b_n(n))$, $\mathbf{0}$ – p-matis nulių stulpelis, $\boldsymbol{J}$ – matrica, kurios nepagrindinėje įstrižainėje yra vienetai, o kitur nuliai. Matrica $\boldsymbol{J}$ apgręžia vektoriaus $\mathbf{b}_n$ reikšmes.

Įstatę (8) į (9), gauname

$$\begin{pmatrix} k_n(0,0) & \mathbf{k}_n^{''H} \\ \mathbf{k}_n'' & \mathbf{K}_{n-1}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n^f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Iš (11) seka, kad

$$\mathbf{k}_n'' = -\mathbf{K}_{n-1}''\mathbf{a}_n, \quad \sigma_n^f - k_n(0,0) = \mathbf{k}_n^{''H}\mathbf{a}_n. \tag{12}$$

Įstatę (7) į (10), gauname

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{n-1}' & \mathbf{k}_n' \\ \mathbf{k}_n^{'H} & k_n(n,n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}\mathbf{b}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma_n^g \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Iš (13) seka, kad

$$\mathbf{k}_n' = -\mathbf{K}_{n-1}'\mathbf{J}\mathbf{b}_n, \quad \sigma_n^g - k_n(n,n) = \mathbf{k}_n^{'H}\mathbf{J}\mathbf{b}_n. \tag{14}$$

Panaudoję suskirstytų į dalis matricų atvirkštinių matricų apskaičiavimo lemą [4], matricos (7) atvirkštinę matricą užrašome taip:

$$\mathbf{K}_n^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1} + \mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1}\mathbf{k}_n^{\prime}\delta^{-1}\mathbf{k}_n^{\prime H} & \mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1}) - \mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1}\mathbf{k}_n^{\prime}\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}\mathbf{k}_n^{\prime H}\mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1} & \delta^{-1} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

čia $\delta = k_n(n,n) - \mathbf{k}_n^{\prime H}\mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1}\mathbf{k}_n^{\prime} = \sigma_n^g$, $\delta^{-1} = 1/\sigma_n^g$, nes iš (14) seka, kad $-\mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1}\mathbf{k}_n^{\prime} = \mathbf{J}\mathbf{b}_n$ ir $\sigma_n^g = k_n(n,n) + \mathbf{k}_n^{\prime H}\mathbf{J}\mathbf{b}_n$.

Dabar (15) galime užrašyti taip:

$$\mathbf{K}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1} + \mathbf{J}\mathbf{b}_n\delta^{-1}\mathbf{b}_n^H & \mathbf{J}\mathbf{J}\mathbf{b}_n\delta^{-1} \\ \delta^{-1}\mathbf{b}_n^H\mathbf{J} & \delta^{-1} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Žinoma [3], kad

$$\mathbf{K}_{n-1}^{\prime -1} = \mathbf{K}_{n-1}^{-1} + \frac{\mathbf{d}_{n-1}\mathbf{d}_{n-1}^H}{1-\beta_{n-1}^d}, \tag{17}$$

čia $\mathbf{d}_{n-1} = \mathbf{K}_{n-1}^{-1}\mathbf{y}_{n-1}^*(n)$, $\mathbf{d}_{n-1}^H = \mathbf{y}_{n-1}^T(n)\mathbf{K}_{n-1}^{-1}$, $\mathbf{d}_{n-1}^T = (d_{n-1}(0), \ldots, d_{n-1}(n))$, $\beta_{n-1}^d = \mathbf{y}_{n-1}^T(n)\mathbf{K}_{n-1}^{-1}\mathbf{y}_{n-1}^*(n)$.

Pažymėkime $\sigma_{n-1}^d = 1 - \beta_{n-1}^d$, tada iš (16) gauname, kad

$$\mathbf{K}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{n-1}^{-1} + \mathbf{d}_{n-1}\mathbf{d}_{n-1}^H/\sigma_{n-1}^d + \mathbf{J}\mathbf{b}_n\mathbf{b}_n^H\mathbf{J}/\sigma_n^g & \mathbf{J}\mathbf{b}_n/\sigma_n^g \\ \mathbf{b}_n^H\mathbf{J}/\sigma_n^g & 1/\sigma_n^g \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Panašiai, suskirstytos į dalis matricos (8) atvirkštinę matricą galima užrašyti taip:

$$\mathbf{K}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_n^f & \mathbf{a}_n^H/\sigma_n^f \\ \mathbf{a}_n/\sigma_n^f & \mathbf{K}_{n-1}^{-1} + \mathbf{c}_{n-1}\mathbf{c}_{n-1}^H/\sigma_{n-1}^c + \mathbf{a}_n\mathbf{a}_n^H/\sigma_n^f \end{pmatrix}, \tag{19}$$

čia $\mathbf{c}_{n-1} = \mathbf{K}_{n-1}^{-1}\mathbf{y}_{n-1}^*(M)$, $\mathbf{c}_{n-1}^T = (c_{n-1}(0), \ldots, c_{n-1}(n))$, $\mathbf{c}_{n-1}^H = \mathbf{y}_{n-1}^T(M)\mathbf{K}_{n-1}^{-1}$, $\sigma_{n-1}^c = 1 - \beta_{n-1}^c$, $\beta_{n-1}^c = \mathbf{y}_{n-1}^H(M)\mathbf{K}_{n-1}^{-1}\mathbf{y}_{n-1}(M)$.

Pažymėkime matricos $\mathbf{K}_n^{-1}$ (i,j)-ąjį elementą $v_n(i,j)$. Iš (18) seka, kad

$$\begin{aligned} &v_n(n,n) = 1/\sigma_n^g, \qquad v_n(n-i,n) = b_n(i)/\sigma_n^g, \\ &v_n(n,n-j) = b_n^*(j)/\sigma_n^g, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n, \\ &v_n(i,j) = v_{n-1}(i,j) + d_{n-1}(i)d_{n-1}^*(j)/\sigma_{n-1}^d \\ &\qquad\qquad + b_n(n-i)b_n^*(n-j)/\sigma_n^g, \quad 0 \leqslant i,j \leqslant n-1. \end{aligned} \tag{20}$$

Iš (19) seka, kad

$$v_n(0,0) = 1/\sigma_n^f, \quad v_n(i,0) = a_n(i)/\sigma_n^f, \quad v_n(0,j) = a_n^*(j)/\sigma_n^f, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

$$v_n(i+1, j+1) = v_{n-1}(i, j) + c_{n-1}(i)c^*_{n-1}(j)/\sigma^c_{n-1}$$
$$+ a_n(i+1)a^*_n(j+1)/\sigma^f_n, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n-1. \tag{21}$$

Įstatę $v_{n-1}(i, j)$ iš (20) į (21), gauname atvirkštinės kovariacinės matricos $\mathbf{K}_n^{-1}$ elementų rekurentinę apskaičiavimo išraišką

$$v_n(i+1, j+1) = v_n(i, j) + a_n(i+1)a^*_n(j+1)/\sigma^f_n - b_n(n-i)b^*_n(n-j)/\sigma^g_n$$
$$+ c_{n-1}(i)c^*_{n-1}(j)/\sigma^c_{n-1} - d_{n-1}(i)d^*_{n-1}(j)/\sigma^d_{n-1}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n-1, \tag{22}$$

kurioje a_n – tiesioginės krypties modelio parametrų įverčiai, σ^f_n – tiesioginės krypties paklaidos dispersijos įvertis, b_n – atgalinės krypties parametrų įverčiai, σ^g_n – atgalinės krypties paklaidos dispersijos įvertis.

Įstatę (22) į (5), ir panaudoję žinomą metodiką [1], gauname spektro įverčio apskaičiavimo išraišką

$$P(f) = \frac{T}{\sum_{k=-n}^{n} \Phi(k)\exp(-j2\pi f kT)}, \tag{23}$$

čia

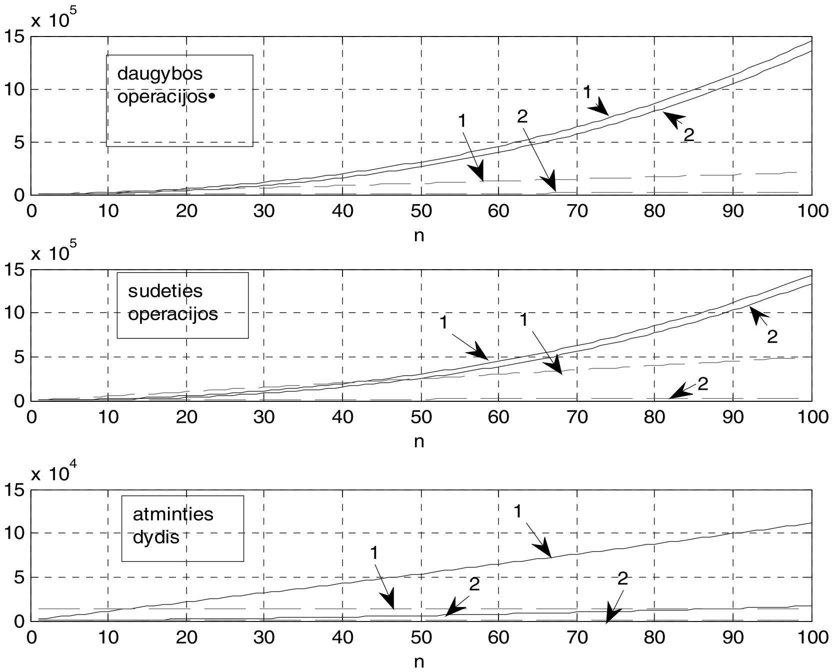
$$\Phi(k) = \sum_{i=0}^{n-k}\big[(n-k-2i+1)a_n(k+i)a^*_n(i)/\sigma^f_n - ib_n(i)b^*_n(k+i)/\sigma^g_n$$
$$+ (n-k-i)c_{n-1}(k+i)c^*_{n-1}(i)/\sigma^c_n$$
$$- (n-k-i)d_{n-1}(i)d^*_{n-1}(k+i)/\sigma^d_n\big], \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$
$$\Phi(k) = \Phi^*(-k), \quad -n \leqslant k \leqslant -1. \tag{24}$$

Išraiškos (23) vardikliui apskaičiuoti galima panaudoti greitosios Furjė transformacijos algoritmą. Taip pat šį algoritmą galima panaudoti $\Phi(k)$ reikšmėms apskaičiuoti.

4. Algoritmo sudėtingumas

Jei spektro įvertį skaičiuotume pagal (5) išraišką, reikėtų atlikti $\frac{2}{3}n^3 + (N + \frac{10}{3})n^2 + (M + 3N + 4)n + (M + 2N)$ kompleksinės daugybos operacijas ir $\frac{2}{3}n^3 + (N+1)n^2 + (M + 2N - \frac{2}{3})n + M$ kompleksinės sudėties operacijas. Tuo tarpu, jei spektro įvertį skaičiuotume pagal (23) išraišką, reikėtų atlikti $3M + \frac{23}{2}n^2 + (2M + \frac{47}{2})n + N\log_2 N$ kompleksinės daugybos operacijas ir $M - \frac{1}{2}n^2 + (5M + \frac{23}{2})n + N\log_2 N$ kompleksinės sudėties operacijas. Šiose išraiškose n – prognozės filtro eilė, M – signalo atskaitų skaičius, N – greitosios Furjė transformacijos taškų skaičius. Kai spektrui skaičiuoti naudojame (5) išraišką, reikalinga atmintis yra $n^2 + (M+4)n + M + N$, o skaičiuojant pagal (23) išraišką, reikalinga atmintis yra $5n + 13M + N$.

1 pav. parodyti skaičiavimo pagal (5) išraišką (ištisinės linijos) ir rekurentinio (punktyrinės linijos) metodų skaičiavimo sudėtingumo ir reikalingos atminties palyginimo grafikai. Skaičiumi 1 pažymėti grafikai, kai $M = 128$, o skaičiumi 2 pažymėti



1 pav. Spektro apskaičiavimo sudėtingumo ir atminties palyginimas. Ištisinės linijos – standartinis algoritmas (5); punktyrinės linijos – rekurentinis algoritmas; 1 – $M = 128$; 2 – $M = 1000$.

grafikai, kai $M = 1000$, $N = 128$. Rekurentinis algoritmas, palyginus su spektro apskaičiavimu pagal (5) išraišką, žymiai sumažina daugybos ir sudėties operacijų skaičių bei reikalingos atminties dydį, kai prognozės filtro eilė n yra didelė.

Literatūra

1. L. Wei, S.L. Marple. A new least-squares based minimum variance spectral estimator fast algorithm. In: *2005 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 4, Philadelphia, P.A., March, 405–408, 2005.
2. B.R. Musicus, Fast MLM power spectrum estimation from uniformly spaced correlations. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(4), October, 1985.
3. P. Stoica, J. Li, X. Tan. On spatial power spectrum and signal estimation using Pisarenko framework. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 56(10), October, 2008.
4. A. Zaknich. *Principles of Adaptive Filters and Self-learning Systems*. Springer, Germany, 2005.

SUMMARY

K. Kazlauskas, J. Kazlauskas, G. Petreikytė. A recurrent algorithm for spectrum estimation

A recurrent algorithm for spectrum estimation is proposed. The efficiency of the algorithm is investigated and results of computational experiments are given.

Keywords: spectrum estimation, inverse matrix, recurrent algorithm.