Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 426–430

Apibendrintų matų sąsūkos

Kazimieras PADVELSKIS[1], Algimantas BIKELIS[2]
[1] Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas
Vileikos g. 8, LT-44404 Kaunas
el. paštas: k.padvelskis@if.vdu.lt; marius@post.omnitel.net

Santrauka. Darbe nagrinėjamos nepriklausomų atsitiktinių dydžių tikimybinių skirstinių sąsūkos. Sąsūkų palyginimui gauta asimptotinė formulė, kurioje yra panaudotos apibendrintų matų sąsūkos.

Raktiniai žodžiai: sudėtinis Puasono skirstinys, Bergstremo tapatybė, Grigelionio asimptotinis skleidinys.

Įvadas

B. Grigelionis darbuose [2,3] nagrinėjo nepriklausomų sveikaskaitinių atsitiktinių dydžių

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

sumos

$$\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}, \tag{2}$$

tikimybinio skirstinio $F_n(x) = P\{\zeta_n < x\}$ aproksimavimą sudėtiniu Puasono dėsnio tikimybiniu skirstiniu $G(x; \{\pi\})$, kurio charakteringoji funkcijas yra

$$\widehat{G}(t) = \exp\left\{\sum_{k\neq 0} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} - 1\right)\pi(k)\right\},$$

čia $\pi(k) \geqslant 0$ ir $\sum_{k\neq 0}\pi(k) < \infty$. Darbe [3] yra reikalaujama, kad

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant k_n} \left(1 - P\{\xi_{nj} = 0\}\right) = 0 \tag{3}$$

bei galiotų sąlygos, užtikrinančios $F_n(x)$ silpną konvergavimą į $G(x; \{\pi\})$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} P\{\xi_{nj} = k\} = \pi(k)$$

ir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\bigl(1-P\{\xi_{nj}=0\}\bigr)=\sum_{k\neq 0}\pi(k).$$

Esant šioms sąlygoms, B. Grigelionis [3] sukonstravo asimptotinį skleidinį $\overline{F}_n(x)$ ir įvertino liekamąjį narį $F_n(x)-\overline{F}_n(x)$.

Dažnai nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių skirstinių sąsūkų nagrinėjimas yra sudėtingas, todėl mes siūlome pereiti prie vienodų tikimybinių skirstinių sąsūkų, t.y. mes konstruojame nepriklausomų sveikaskaitinių vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką

$$\eta_{n1},\eta_{n2},\dots,\eta_{nk_n},\tag{4}$$

su pasiskirstymo funkcija

$$G_n(x)=P\{\eta_{n1}<x\}=\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}P\{\xi_{nj}<x\}\tag{5}$$

ir nagrinėjame skirtumą

$$\Delta_n(x)=F_n(x)-G_n^{*k_n}(x),\tag{6}$$

čia simbolis $*$ žymi nurodytų pasiskirstymo funkcijų sąsūką, t.y. $G_n^{*k_n}(x)$ yra sumos $\eta_n=\eta_{n1}+\eta_{n2}+\dots+\eta_{nk_n}$ pasiskirstymo funkcija.

Pasinaudoję H. Bergstremo [1] tapatybe

$$F^{*n}(x)=G^{*n}(x)+\sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu}(F-G)^{*\nu}*G^{*(n-\nu)}(x)+r_n^{(s+1)},$$

čia $s\geqslant 1$, $F(x)$ ir $G(x)$ – pasiskirstymo funkcijos, o

$$r_n^{(s+1)}=\sum_{m=s+1}^{n}\binom{m-1}{s}F^{*(n-m)}*(F-G)^{*(s+1)}*G^{*(m-s-1)}(x),$$

gauname

$$G_n^{*k_n}(x)=\sum_{\nu=0}^{s}\binom{k_n}{\nu}\bigl(G_n(x)-G^{*\frac{1}{k_n}}\bigl(x;\{\pi\}\bigr)\bigr)^{*\nu}*G^{*\frac{k_n-\nu}{k_n}}\bigl(x;\{\pi\}\bigr)+r_{k_n}^{(s+1)}.$$

1. Charakteringųjų funkcijų asimptotiniai skleidiniai

Atsitiktinių dydžių ξ_{nj} ir ζ_n charakteringąsias funkcijas atitinkamai žymėsime $\widehat{F}_{nj}(t)$ ir $\widehat{F}_n(t)$. Tada atsitiktinio dydžio η_{n1} charakteringoji funkcija yra

$$\widehat{G}_n(t)=\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}\widehat{F}_{nj}(t).$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai ξ_{nj} ir η_{nj} yra sveikaskaitiniai, tai

$$\widehat{F}_{nj}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} P\{\xi_{nj} = m\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} p_{nj}(m)$$

ir

$$\widehat{G}_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} P\{\eta_{n1} = m\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} p_{nj}(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} p_n(m).$$

Šiuo atveju (3) sąlygą užrašome taip

$$\lim_{n\to\infty} \bigl(1 - p_n(0)\bigr) = 0.$$

Pastebėsime, kad $\widehat{G}_n(t) \neq 0$ visiems $t \in \mathbb{R}$, kai $n \in A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(0) > \frac{3}{4}\}$.

Vietoje (6) nagrinėsime skirtumą

$$\widehat{\Delta}_n(t) = \widehat{F}_n(t) - \widehat{G}_n^{k_n}(t) = \prod_{r=1}^{k_n} \widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n^{k_n}(t). \tag{7}$$

Kai $n \in A_1$, gauname

$$\widehat{F}_n(t) = \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp\left\{ \sum_{r=1}^{k_n} \log\left(1 + \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)}\right)\right\}. \tag{8}$$

Akivaizdu, kad $|\widehat{G}_n(t)| \geqslant 2p_n(0) - 1 > \frac{1}{2}$ visiems $t \in \mathbb{R}$ ir $n \in A_1$. Be to,

$$\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \bigl(p_{nr}(m) - p_{nj}(m)\bigr) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} q_{nr}(m).$$

Pažymėkime

$$q_n = \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_n} \left| \sum_{j=1}^{k_n} \bigl(p_{nr}(m) - p_{nj}(m)\bigr)\right|.$$

Pastebėsime, kad $q_n = 0$, jei (1) sekoje atsitiktiniai dydžiai turi vienodus tikimybių skirstinius. Akivaizdu, kad $q_n \leqslant 2$.

Pažymėkime $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid 5q_n < 2p_n(0) - 1\}$. Tada, kai $n \in A_1 \bigcap A_2$, turime

$$\left| \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \right| < \frac{4}{5},$$

visiems $t \in \mathbb{R}$ ir $r = 1, 2, \ldots, k_n$.

Dabar (8) formulę, kai $n \in A_1 \bigcap A_2$, galime parašyti

$$\widehat{F}_n(t) = \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp\left\{ \sum_{r=1}^{k_n} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left(\frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \right)^l \right\}. \tag{9}$$

Šioje formulėje išnaudojome tapatybę

$$\sum_{r=1}^{k_n} \frac{\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t)}{\widehat{G}_n(t)} \equiv 0.$$

Toliau

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_n(t) &= \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp\left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left(\frac{1}{k_n}\right)^l \sum_{r=1}^{k_n} \left(\frac{k_n(\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t))}{\widehat{G}_n(t)} \right)^l \right\} \\
&= \widehat{G}_n^{k_n}(t) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j}}{j+1} \left(\frac{1}{k_n}\right)^j \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} \left(\frac{k_n(\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t))}{\widehat{G}_n(t)} \right)^{j+1} \right\} \\
&= \widehat{G}_n^{k_n}(t) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_n}\right)^j \beta_j(t) \right),
\end{aligned} \tag{10}$$

čia

$$\beta_j(t) = \sum_{\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + j\nu_j = j} \frac{(-1)^{\nu_1 + \cdots + \nu_j}}{\nu_1! \cdots \nu_j!} \prod_{l=1}^{j} \left(\frac{\alpha_l(t)}{l+1} \right)^{\nu_l},$$

$$\alpha_l(t) = \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} \left(\frac{k_n(\widehat{F}_{nr}(t) - \widehat{G}_n(t))}{\widehat{G}_n(t)} \right)^{l+1}.$$

Atlikę skaičiavimus, kuriuos čia praleidžiame, gauname

$$\beta_j(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} \sum_{\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + j\nu_j = j} \prod_{l=1}^{j} \left(-\frac{1}{k_n(l+1)\nu_j!} \sum_{r=1}^{k_n} Q_r^{*(l+1)}(m) \right)^{*\nu_l}, \tag{11}$$

čia daugianariai $Q_r^{*l}(m)$ priklauso nuo tikimybių $p_{nr}(m)$, $r = 1, 2, \ldots, k_n$.

Iš (10) ir (11) lygybių gauname skirtumo $\widehat{\Delta}_n(t) = \widehat{F}_n(t) - \widehat{G}_n^{k_n}(t)$ formalųjį sklei- dinį.

2. Tikimybių $P\{\zeta_n = k\}$ ir $P\{\eta_n = k\}$ palyginimas

Tegul galioja (3) sąlyga ir $n \in A_1 \bigcap A_2$. Iš (10) ir (11) lygybių gauname

$$\widehat{F}_n(t) = \widehat{G}_n^{k_n}(t) + \widehat{G}_n^{k_n}(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tm} L_n(m), \tag{12}$$

čia

$$L_n(m) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_n}\right)^j \sum_{\nu_1+2\nu_2+\cdots+j\nu_j=j} \prod_{l=1}^{j} \left(-\frac{1}{k_n(l+1)\nu_j!} \sum_{r=1}^{k_n} Q_r^{*(l+1)}(m) \right)^{*\nu_l}.$$

Tačiau (1) sekoje atsitiktiniai dydžiai yra sveikaskaitiniai, tai

$$\begin{aligned} P\{\zeta_n = k\} &= P\{\eta_n = k\} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\{\eta_n = k - m\} L_n(m) \\ &= P\{\eta_n = k\} + G_n^{*k_n} * L_n(k), \end{aligned} \tag{13}$$

visiems $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Gautoje (13) lygybėje liekamojo nario įvertį paskelbsime kitame straipsnyje.

Literatūra

1. H. Bergström. On asymptotic expansions of probability functions. *Skand. Aktuarietidskrift*, 34(1):1–34, 1951.
2. B. Grigelionis. On asymptotic expansion of the remainder term in the case of convergence to a Poisson law. *Liet. mat. rink.*, 2(1):35–48, 1962 (in Russian).
3. B. Grigelionis. Asymptotic expansions in the compound Poisson limit theorem. *Acta Applicandae Mathematicae*, 58:125–134, 1999.

SUMMARY

K. Padvelskis, A. Bikelis. Convolutions of generalized measures

The convolutions of probability distributions of independent random variables are analysed in this paper.

Keywords: compound Poisson distribution, Bergström's identity, Grigelionis' asymtotic expansion.