Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 60–65

О максимальных K_n-областях для некоторых семейств рациональных функций

Евгений КИРЬЯЦКИЙ, Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: ekira@post.omnitel.net, eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. Пусть $K_n(D)$ – класс аналитических в D функций, для которых n-ая разделенная разность $[F(z); z_0, \ldots, z_n]$ не обращается в нуль при любых $z_0, \ldots, z_n \in D$. Область D называется максимальной K_n-областью семейства T аналитических в области D функций, если при присоединении к области D какой-либо окрестности произвольной граничной точки найдется функция из T, уже не принадлежащая классу K_n в расширенной области. Максимальная область однолистности, т.е. максимальная K_1-область была рассмотрена болгарским математиком Л. Чакаловым. В данной работе в качестве K_n-областей рассматриваются угловые области. Мы находим максимальные K_n-области для двух специального вида семейств рациональных функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, разделенная разность, угловая область.

Введение. Определим n-ую разделенную разность аналитической в односвязной области D функции $F(z)$ формулой (см. [1])

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \frac{1}{2\pi!} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) \ldots (\xi - z_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур, расположенный в области D и охватывающий все точки $z_0, \ldots, z_n \in D$.

Через $K_n(D)$ обозначим класс аналитических в D функций для которых n-ая разделенная разность $[F(z0; z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \ldots, z_n \in D$ (см. [2]).

Область D называется K_n-областью семейства T аналитических в D функций, если любая функция $F(z)$ из этого семейства принадлежит классу K_n в области D, т.е. если $F(z) \in K_n(D)$.

Область D называется максимальной K_n-областью семейства T аналитических в области D функций, если она обладает следующим свойством: при присоединении к области D какой-либо окрестности произвольной граничной точки, всегда найдется функция из T, уже не принадлежащая классу K_n в расширенной области. Например, для семейства многочленов $F(z) = z^n + az^{n+1}$, где $|a| \leqslant 1/(n+1)$, единичный круг $|z| < 1$ является максимальной K_n-областью. Для семейства многочленов $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ ее K_n-областью будет комплексная плоскость. Эта K_n-область является и максимальной K_n-областью. Заметим, что здесь комплексная плоскость является единственной максимальной K_n-областью для семейства указанных выше многочленов.

Для одного и того же семейства может существовать более одной максимальной K_n-области. Возьмем, например, простой случай, когда семейство T состоит из одной функции $F(z) = z^2$. Тогда его максимальной K_n-областью (т.е. максимальной областью однолистности) может служит любая полуплоскость, ограниченная прямой, проходящей через начало координат. Имеются и более сложные задачи отыскания максимальных областей однолистности, например (см. [3]), определение максимальной области однолистности гамма-функции. Пока неизвестна максимальная K_n-область показательной функции $F(z) = e^z$ при $n \geqslant 2$. Конечно, количество примеров можно увеличить.

Максимальная область однолистности, т.е. максимальная K_1-область была рассмотрена Л. Чакаловым в [4]. При $n \geqslant 2$ понятие K_n-областей было впервые введено Э.Г. Кирьяцким (см.[5]).

В данной работе в качестве K_n-областей рассматриваются угловые области. Мы находим максимальные K_n-области для двух специального вида семейств рациональных функций.

1. Через $D(\alpha)$ обозначим угловую область, ограниченную сторонами угла $U(\alpha)$ величиной α с вершиной в точке ξ. Через $D^*(\alpha)$ обозначим угловую область, ограниченную сторонами угла $U^*(\alpha)$, вертикального по отношению к углу $U(\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть $T^+(U(\alpha))$ – семейство многочленов вида*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p} A_k (z - a_k)^m,$$

где m – натуральное число, $|\arg A_k| \leqslant \gamma$, $0 \leqslant \gamma < \pi/2$, $a_k \in U^*(\alpha)$, $\alpha = (\pi - 2\gamma)/(m-n)$, $m > n$. Тогда любая функция $F(z)$ из семейства $T^+(U(\alpha))$ принадлежит классу $K_n(D(\alpha))$ и угловая область $D(\alpha)$, ограниченная углом $U(\alpha)$ с вершиной в точке ξ является максимальной K_n-областью семейства $T^+(U(\alpha))$.

Доказательство. Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D(\alpha)$. Известна формула (см. [6])

$$\left[(z - a_k)^m; z_0, \ldots, z_n\right] = \sum_{m_0 + \ldots + m_n = m-n} (z_0 - a_k)^{m_0} (z_1 - a_k)^{m_1} \ldots (z_n - a_k)^{m_n}, \tag{1}$$

где сумма распространена на все неотрицательные целые числа $m_0, \ldots, m_n$. Пользуясь свойствами разделенных разностей, получим (см. [2])

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \sum_{k=1}^{p} \sum_{m_0 + \ldots + m_n = m-n} A_k (z_0 - a_k)^{m_0} \ldots (z_n - a_k)^{m_n}.$$

В силу выбора точек $z_0, z_1, \ldots, z_n$ существует число λ такое, что

$$\lambda - \frac{\pi - 2\gamma}{2(m-n)} < \arg(z_j - a_k) < \lambda + \frac{\pi - 2\lambda}{2(m-n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Отсюда, с учетом условий теоремы 1, легко получим

$$\lambda(m-n) - \frac{\pi}{2} < \arg A_k (z_0 - a_k)^{m_0} \ldots (z_n - a_k)^{m_n} < \lambda(m-n) + \frac{\pi}{2} \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Значит, все значения разделенной разности (1) при любых $z_0, \ldots, z_n \in D(\alpha)$ лежат в одной плоскости. По лемме Гаусса (см.[7]) следует, что $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D(\alpha)$. Отсюда заключаем, что область $D(\alpha)$ является K_n-областью для семейства $T^+(U(\alpha))$.

На стороне угла $U(\alpha)$ возьмем произвольным образом точку ψ и ее круговую окрестность достаточно малого радиуса. В этой круговой окрестности существует точка ζ, которая не принадлежит замыканию $\bar{D}(\alpha)$. Так как $\alpha > 0$, то существует угол с вершиной в точке ζ, стороны которого пересекают стороны угла $U^*(\alpha)$, причем этот угол можно взять величиной α. Отметим точки пересечения b_1, b_2 и возьмем в семействе $T^+(U^*(\alpha))$ функцию

$$F_0(z) = \lambda_1 e^{-i\gamma}(z - b_1)^m + \lambda_2 e^{i\gamma}(z - b_2)^m, \quad \text{где } \lambda_1 = \frac{1}{|\zeta - b_1|^{m-n}}, \ \lambda_2 = \frac{1}{:\zeta - b_2|^{m-n}}.$$

Заметим, что $|\arg(\zeta - b_1)/(\zeta - b_2)| = \alpha$. Теперь легко понять, что $F_0^{(n)}(\zeta) = 0$. Но тогда (см. [2]) функция $F_0(z) \notin K_n(D_0)$, где область D_0 является расширением угловой области $D(\alpha)$ за счет точки ψ. Отсюда заключаем, что угловая область $U(\alpha)$, ограниченная углом с вершиной в точке ξ, является максимальной K_n-областью для семейства $T^+(U(\alpha))$.

2. Теорема 2. *Пусть $T^-(U(\alpha))$ – семейство рациональных функций*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(z - a_k)^m},$$

где m – натуральное число, $|\arg A_k| \leqslant \gamma$, $0 \leqslant \gamma < \pi/2$, $\alpha_k \in U^*(\alpha)$, $\alpha = (\pi - 2\gamma)/(m+n)$. Тогда любая функция $F(z)$ из семейства $T^-(U(\alpha))$ принадлежит классу $K_n(D(\alpha))$ и угловая область $D(\alpha)$, ограниченная углом $U(\alpha)$ с вершиной в точке ξ является максимальной K_n-областью семейства $T^-(U(\alpha))$.

Доказательство. Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n$ произвольные точки угловой области $D(\alpha)$. Пользуясь элементарными свойствами разделенных разностей, получим (см. [2])

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = (-1)^n \sum_{k=1}^{p} \sum_{m_0 + \ldots + m_n = m+n} \frac{A_k}{(z_0 - a_k)^{m_0}(z_1 - a_k)^{m_1} \ldots (z_n - a_k)^{m_n}}, \quad (2)$$

где вторая сумма распространена на все неотрицательные целые числа $m_0, m_1, \dots m_n$. Для точек $z_0, z_1, \dots, z_n$ существуют соответствующие точки $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in M$ такие, что

$$\left|\arg \frac{z_j - \zeta_j}{z_j - a_k}\right| < \frac{\pi - 2\gamma}{2(m+n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, p.$$

Значит,

$$\left|\arg A_k \left(\frac{z_0 - \zeta_0}{z_0 - a_k}\right)^{m_0} \left(\frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 - a_k}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{z_n - \zeta_n}{z_n - a_k}\right)^{m_n}\right| < \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, \dots, p.$$

Отсюда следует существование чисел $c_1, \dots, c_p$ со свойством

$$c_k - \frac{\pi}{2} < \frac{A_k}{(z_0 - a_k)^{m_0} \dots (z_n - a_k)^{m_n}} < c_k + \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, \dots, p.$$

Последние неравенства означают, что точки

$$C_k(m_0, m_1, \dots, m_n) = \frac{A_k}{(z_0 - a_k)^{m_0} \dots (z_n - a_k)^{m_n}}, \quad k = 1, \dots, p,$$

расположены по одну сторону от некоторой прямой. Тогда точки

$$\sum C_k(m_0, m_1, \dots, m_n), \quad \text{где } m_0 + m_1 + \dots + m_n = m + n \ \text{ и } m_i \geqslant 0, \ 1 \leqslant k \leqslant p,$$

также расположены по одну сторону от некоторой прямой. Теперь легко понять, что все значения разделенной разности (2) принадлежат полуплоскости. По лемме Гаусса следует, что $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, z_1, \dots, z_n \in D(\alpha)$. Отсюда заключаем, что область $D(\alpha)$ является K_n-областью.

На стороне угла $U(\alpha)$ возьмем произвольным образом точку ψ и ее круговую окрестность достаточно малого радиуса. В этой круговой окрестности существует точка ζ, которая не принадлежит замыканию $\bar{D}(\alpha)$. Так как $\alpha > 0$, то существует угол с вершиной в точке ζ, стороны которого пересекают стороны угла $U^*(\alpha)$, причем этот угол можно взять величиной α. Отметим точки пересечения b_1, b_2 и возьмем в семействе $T^-(U^*(\alpha))$ функцию

$$F_0(z) = \frac{\lambda_1^{m+n} e^{-i\lambda}}{(z - b_1)^m} + \frac{\lambda_2^{m+n} e^{i\lambda}}{(z - b_2)^m}, \quad \lambda_1 = |\zeta - b_1|, \ \lambda_2 = |\zeta - b_2|.$$

Заметим, что $|\arg(\zeta - b_1)/(\zeta - b_2)| = \alpha$. Теперь легко понять, что $F_0^{(n)} = 0$. Но тогда функция $F_0(z) \notin K_n(D_0)$, где область D_0 является расширением угловой области $D(\alpha)$ за счет точки ψ. Отсюда заключаем, что угловая область $D(\alpha)$, ограниченная углом $U(\alpha)$ с вершиной в точке ξ, является максимальной K_n-областью для семейства $T^-(U(\alpha))$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $n = 1$. *Тогда область* $D(\alpha)$ *является максимальной областью однолистности для семейства* $T^+(U(\alpha))$.

Пусть выполнены условия теоремы 2 *и* $n = 1$. *Тогда область* $D(\alpha)$ *является максимальной областью однолистности для семейства* $T^-(U(\alpha))$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда любая функция* $F(z)$ *из семейства* $T^+(U(\alpha))$ *образует с функциями* $1, z, \dots, z^{n-1}$ *систему Чебышева в области* $D(\alpha)$, *т.е. уравнение*

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + F(z) = 0$$

при любых $c_0, \dots, c_{n-1}$ *имеет не более* $n-1$ *корней в области* $D(\alpha)$.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда любая функция $F(z)$ *из семейства* $T^-(U(\alpha))$ *образует с функциями* $1, z, \dots, z^{n-1}$ *систему Чебышева в области* $D(\alpha)$, *т.е. уравнение*

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + F(z) = 0$$

при любых $c_0, \dots, c_{n-1}$ *имеет не более* $n-1$ *корней в области* $D(\alpha)$.

Литература

1. И.И. Ибрагимов, *Методы интерполяции функций и некоторые их применения*, Москва, Наука (1971).
2. Э.Г. Кирьяцкий, *Многолистные функции и разделенные разности*, Вильнюс, Техника (1994).
3. Б.В. Басевич, Об однолистности некоторых функций, *Труды Томского госуниверситета*, **189**, 137–143 (1968).
4. Л. Чакалов, Максимальные области однолистности некоторых классов аналитических функций, *Укр. матем. журнал*, **4**, 326–331 (1959).
5. Э.Г. Кирьяцкий, Распространение некоторых теорем Аксентьева и Чакалова на класс, *Лит. мат. сб.*, **10**(2), 91–96 (1970).
6. И.С. Березин, Н.П. Жидков, *Методы вычислений*, Москва, т.1 (1959).
7. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, Москва, Гостехиздат, 1 часть (1936).

REZIUMĖ

J. Kirjackis, E. Kirjackis. Apie kai kurių racionaliųjų funkcijų klasių maksimaliąsias K_n sritis

Tegul $K_n(D)$ yra klasė funkcijų analizinių srityje D tokių kad $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ bet kuriems $z_0, \dots, z_n \in D$.

Sritį D vadinsime maksimaliąja K_n sritimi funkcijų šeimos T, jeigu bet kuriai aplinkai $\varepsilon(\psi)$ ribinio taško ψ iš D egzistuoja funkcija iš T nepriklausanti $K_n(D \smile \varepsilon(\psi))$. Maksimalioji vienalapiškumo sritis, t.y maksimalioji K_n-sritis buvo nagrinėta Bulgarijos matematiko L. Čiakalovo.

Straipsnyje nagrinėjamos kampinės K_n-sritys. Nustatomos K_n-sritys dviem specialioms racionaliųjų funkcijų klasėms.

Raktiniai žodžiai: analizinės funkcijos, padalyti skirtumai, kampinės sritys.

SUMMARY

J. Kirjackis, E.G. Kiryatzkii. On maximal K_n domains for certain families of rational functions

Let $K_n(D)$ be a class of analytic in domain D functions such that $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ for any $z_0, \dots, z_n \in D$.

The domain D is called by maximal K_n-domain of the family T of functions which are analytic in D, if for any neighborhood $\varepsilon(\psi)$ of any boundary point ψ of D there exists a function from T which does not belong to $K_n(D \smile \varepsilon(\psi))$. The maximal domain of univalence, i.e., maximal K_1 domain was investigated by Bulgarian mathematician L. Chakalov.

In this paper as maximal K_n-domains the angular domains are examined. K_n-domains for two special classes of rational functions are established.

Keywords: analytic function, divided difference, angular domain.