Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 66–71

Apie vidurkinimo operatoriaus aproksimaciją

Aleksandras KRYLOVAS (VGTU)
el. paštas: akr@fm.vgtu.lt

Reziumė. Pasiūlytas algoritmas kvaziperiodinių funkcijų vidurkinimo operatoriaus aproksimacijoms konstruoti. Algoritmas leidžia konstruoti diferencialinių lygčių su mažuoju parametru asimptotinius artinius, tolygiai tinkamus ilgame laiko intervale.

Raktiniai žodžiai: netiesiniai svyravimai, rezonansai, mažieji vardikliai, vidurkinimas.

1. Vidurkinimo metodas taikomas paprastųjų diferencialinių lygčių, lygčių dalinėmis išvestinėmis, integralinių lygčių asimptotinėje analizėje. Jo idėja — atskirti tam tikrų funkcijų integralų pagrindinę dalį nuo osciliuojančiosios dalies.

Tarkime, kad $f(t)$: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ yra periodinė funkcija. Tada

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \langle f\rangle\, t + F(t), \tag{1}$$

$\langle f\rangle = \lim\limits_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s$ yra funkcijos $f(t)$ vidurkis, $F(t) = \int_0^t (f(s) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}s$ – periodinė funkcija.

Jei funkcija $f(t)$ nėra periodinė, $F(t)$ (1) formulėje gali būti neaprėžta, kai $t \in [0, +\infty)$. Tačiau asimptotinėje analizėje paprastai svarbus jos augimo greitis baigtiniame, bet ilgajame intervale, pavyzdžiui, $t \in [0, \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})]$, $(0 < \varepsilon \ll 1)$. Nustatyti efektyvius funkcijos $F(t)$ augimo greičio įverčius, atsižvelgiant į konkretų uždavinį yra vidurkinimo metodo matematinio pagrindimo esmė. Šiame darbe nagrinėjama kvaziperiodinė funkcija

$$f(t) = g(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_n t), \quad \alpha_j \in \mathcal{R}, \tag{2}$$

kai funkcija $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra periodinė pagal kiekvieną kintamąjį x_j su periodu 2π, tačiau šis apribojimas periodui nėra esminis. Funkcija $F(t)$ aprėžta tada ir tik tada, kai ji yra beveik periodinė (žr., pvz. [1]), o tai priklauso nuo skaičių α_j algebrinių savybių.

Tarkime, kad T yra didelis teigiamas parametras ir $F_T = \max\limits_{t\in[0,T]} |F(t)|$. Šio darbo tikslas – išnagrinėti įverčio F_T savybes, konstruojant vidurkio $\langle f\rangle$ aproksimacijas. Pakeiskime (2) formulės funkciją $g(\cdots)$ ją aproksimuojančiu trigonometriniu polinomu

$$g_N(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\vec{l} \in \mathcal{Z}^n,\ \|\vec{l}\| \leqslant N} g_{\vec{l}}\, e^{\mathbf{i}(l_1 x_1 + \dots + l_n x_n)} \tag{3}$$

Čia $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathcal{Z}^n$, $\|\vec{l}\| = \max\limits_{j=1,2,\dots,n} |l_j|$. Aproksimacijos $g(\cdots) \approx g_N(\cdots)$ paklaida $r_N(x_1, \dots, x_n) = g - g_N$ priklauso tik nuo funkcijos g glodumo (tolydžiųjų dalinių išvestinių eilės) ir nepriklauso nuo skaičių $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Pažymėkime $R_N = \max\limits_{(x_1,\dots,x_n) \in [0,2\pi]^n} |r_N(x_1, \dots, x_n)|$.

Nagrinėsime gaunamus iš (2), (3) formulių reiškinius

$$\delta_{\vec{l}}\ (\vec{\alpha}) = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n \tag{4}$$

ir jų aproksimacijas $\delta_{\vec{l}}\ (\vec{\tilde{\alpha}})$, kai $\vec{\tilde{\alpha}} \approx \vec{\alpha}$.

Perrašome (1) lygybę taip:

$$\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^t \Big(f(s) - g_{\vec{\alpha},N}(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^t \Big(g_{\vec{\alpha},N}(s) - g_{\vec{\tilde{\alpha}},N}(s)\Big)\,\mathrm{d}s \tag{5}$$
$$+ \int_0^t \Big(g_{\vec{\tilde{\alpha}},N}(s) - \Big\langle g_{\vec{\tilde{\alpha}},N}\Big\rangle\Big)\,\mathrm{d}s + t\Big\langle g_{\vec{\tilde{\alpha}},N}\Big\rangle.$$

Iš (5) matome, kad galioja įvertis

$$\frac{1}{T}\max_{0 \leqslant t \leqslant T}\left|\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s - t\Big\langle g_{\vec{\tilde{\alpha}},N}\Big\rangle\right| \leqslant R_N + C_N\, T\,\Big\|\vec{\alpha} - \vec{\tilde{\alpha}}\Big\| + \frac{I^0_{\vec{\tilde{\alpha}},N}}{T}. \tag{6}$$

Čia pažymėta $C_N \leqslant n \cdot \max\limits_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \in [0,2\pi]^n \\ j=1,2,\dots,n}} \left|\dfrac{\partial g_N\left(x_1, \dots, x_n\right)}{\partial x_j}\right|$,

$$I_{\vec{\tilde{\alpha}},N}(t) = \sum_{\vec{l} \in \mathcal{Z}^n:\ \delta_{\vec{l}}\left(\vec{\tilde{\alpha}}\right) \neq 0,\ \|\vec{l}\| \leqslant N} g_{\vec{l}}\,\frac{e^{\mathbf{i}\delta_{\vec{l}}\left(\vec{\tilde{\alpha}}\right)t} - 1}{\mathbf{i}\delta_{\vec{l}}\left(\vec{\tilde{\alpha}}\right)}, \qquad I^0_{\vec{\tilde{\alpha}},N} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T}\left|I_{\vec{\tilde{\alpha}},N}(t)\right|,$$
$$\Big\langle g_{\vec{\tilde{\alpha}},N}\Big\rangle = \sum_{\vec{l} \in \mathcal{Z}^n:\ \delta_{\vec{l}}\left(\vec{\tilde{\alpha}}\right) = 0,\ \|\vec{l}\| \leqslant N} g_{\vec{l}}. \tag{7}$$

2. Tarkime, kad ε yra mažas teigiamas parametras ir $T = \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})$. Tada (6) nelygybės dešinioji pusė bus $\mathrm{o}(1)$, kai $\vec{\tilde{\alpha}} = \vec{\alpha}$, nepriklausomai nuo skaičių α_j savybių

[2]. Jei α_j algebriniai skaičiai[1], šis įvertis gali būti patikslintas: $\mathrm{O}(\varepsilon^{\gamma})$, $0 < \gamma \leqslant 1$. Autoriaus darbe [3] buvo pasiūlyta taikyti dažnių aproksimaciją $\vec{\alpha} \approx \vec{\tilde{\alpha}}$, kuri leido konstruoti hiperbolinių sistemų asimptotinių skleidinių aukštesnių eilių narius, tačiau tokių aproksimacijų praktiniai aspektai nebuvo nagrinėjami. Iš (6) įverčio matome, kad geriausią dažnių aproksimaciją gausime, kai

$$\frac{\left\|\vec{\alpha} - \vec{\tilde{\alpha}}(\varepsilon)\right\| C_{N(\varepsilon)}}{\varepsilon} = \mathrm{O}(R_{N(\varepsilon)}) = \mathrm{O}\big(\varepsilon I^0_{\vec{\tilde{\alpha}}(\varepsilon), N(\varepsilon)}\big). \tag{8}$$

Taigi praktiniam aproksimacijos $\vec{\alpha} \approx \vec{\tilde{\alpha}}$ taikymui reikia patikimai (derinant skaičiavimų tikslumą su mažuoju parametru ε) skaičiuoti osciliuojančiojo integralo maksimumą $I^0_{\vec{\tilde{\alpha}}, N}$. Nagrinėsime nenulinius Furjė koeficientus $g_{\vec{l}}$ ir skaičių α_j aproksimacijas racionaliosiomis trupmenomis $\tilde{\alpha}_j = \frac{p_j}{q_j}$, Q – skaičių $q_1, \ldots, q_n$ mažiausiasis bendrasis kartotinis. Tada pažymėję $p'_j = p_j Q$, turime

$$\delta_{\vec{l}}\,\left(\vec{\tilde{\alpha}}\right) = \frac{P_{\vec{l}}}{Q},\ P_{\vec{l}} = p'_1 l_1 + p'_2 l_2 + \cdots + p'_n l_n \in \mathcal{Z}.$$

Pažymėkime sveikaskaičių vektorių $\vec{l} \in \mathcal{Z}^n$ aibes

$$A_{s,N} = \left\{\|\vec{l}\| \leqslant N,\ g_{\vec{l}} \neq 0,\ Q \cdot \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{p'_j l_j}{q_j}\right| \cdot \left\lceil \frac{1}{|g_{\vec{l}}|} \right\rceil = s\right\}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

Tada $A_{0,N}$ yra rezonansinių vektorių aibė ir (7) vidurkį gauname taip:

$$\left\langle g_{\vec{\tilde{\alpha}}, N}\right\rangle = \sum_{\vec{l} \in A_{0,N}} g_{\vec{l}}\,. \tag{9}$$

Nerezonansinė osciliuojančiojo integralo dalis išreiškiama formule

$$I_{\vec{\tilde{\alpha}}, N}(t) = J(x) = Q \cdot \sum_{s=1,\ \vec{l} \in A_{s,N}}^{S(N)} g_{\vec{l}} \left\lceil |g|^{-1}_{\vec{l}} \right\rceil \frac{e^{\mathbf{i} P_{\vec{l}} x}}{s}, \qquad x = \frac{t}{Q}. \tag{10}$$

Atkreipkime dėmesį, kad $g_{\vec{l}} \left\lceil |g|^{-1}_{\vec{l}} \right\rceil = \mathrm{O}(1)$. Todėl (10) algoritmas leidžia išvengti skirtingų eilių dėmenų sumavimo, t. y. apvalinimo paklaidų kaupimo (žr. [4]). Funkcijos $J(x)$ periodas lygus 2π. Todėl $\max|J(x)|$ nepriklauso nuo intervalo $t \in [0, T]$ ilgio $T = \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})$ ir turime skaitinės, o ne asimptotinės analizės uždavinį.

[1] Tai galioja ne tik algebriniams, bet ir beveik visiems skaičiams, Lebego mato prasme.

3. Nagrinėsime modelinę sistemą, (11) turinčią du greituosius (y, z) ir vieną lėtąjį (x) kintamąjį. Šiai sistemai būdingos daug bendresnių, pavyzdžiui, dangaus mechanikos uždavinių, problemos (žr. [5,6]).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(ny - mz)}{n^3 + m^3}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \lambda, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{11}$$

Jei λ yra iracionalusis skaičius, sistemos klasikiniu vidurkinimu gausime nedaug informacijos apie sprendinį: $x(t; \varepsilon) = \mathrm{o}(1)$. Aproksimuokime dažnį racionaliosiomis trupmenomis:

$$\lambda \approx \tilde{\lambda} = \frac{p}{q}.$$

Tada $y = t$, $z \approx \tilde{\lambda} t$ ir asimptotinio sprendinio $x(t; \varepsilon) = x_0(t; \varepsilon) + \varepsilon x_1(t; \varepsilon)$ ieškome iš šios suvidurkintosios lygties

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \sum_{m,n \in A_{0,N}} \frac{1}{m^3 + n^3}, \quad x_0(0; \varepsilon) = 0. \tag{12}$$

Taigi gauname asimptotinį skleidinį

$$x_0(t; \varepsilon) = \varepsilon t \sum_{m,n \in A_{0,N}} \frac{1}{m^3 + n^3}.$$

Tarkime, kad (11) sistemos dažnis $\lambda = \pi$. Geriausias šiuo metu [7] žinomas atsirandančių integruojant (11) reiškinį mažųjų vardiklių įvertis yra toks

$$|n - \pi m| > m^{-7{,}0161}. \tag{13}$$

Iš (13) gauname (žr. [3]) asimptotinio artinio $x(t, \varepsilon) \equiv 0$ paklaidos įvertį $\mathrm{O}(\varepsilon^{\frac{1}{8{,}0161}})$. Praktikoje jis gali būti ir netaikytinas esant konkrečioms mažojo parametro ε reikšmėms. Taikydami aproksimaciją $\pi \approx \frac{p(\varepsilon)}{q(\varepsilon)}$ gauname (12) uždavinio sprendinio asimptotinę aproksimaciją ir paklaidos įvertį galime pagerinti, jei $\frac{\pi - \frac{p(\varepsilon)}{q(\varepsilon)}}{\varepsilon} \ll \varepsilon^{\frac{1}{8{,}0161}}$.

Taikome skaičiaus π aproksimacijas racionaliosiomis trupmenomis. Paimkime $\pi \approx \frac{22}{7}$. Tada $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 0{,}001264543\ldots < 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ ir tolygiai laiko intervale $t \in [0, \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})]$ turime asimptotinį artinį

$$x_0(t; \varepsilon) = \frac{\varepsilon t}{7^3 + 22^3}\left(1 + \frac{1}{8} + \cdots\right) \tag{14}$$

Matome, kad (14) skleidinys nelygus artiniui $x(t, \varepsilon) \equiv 0$. Taikydami dar tikslesnę skaičiaus π aproksimaciją $\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < 3{,}2 \cdot 10^{-7}$, gausime

$$x_0(t; \varepsilon) = \frac{\varepsilon t}{113^3 + 355^3}\left(1 + \frac{1}{8} + \cdots\right). \tag{15}$$

Elementariais, nors ir gremėzdiškais pertvarkiais gaunami (6) nelygybės dydžių įverčiai (11) uždaviniui, kuriuos pateiksime be įrodymo:

$$R_N \leqslant \frac{\pi + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\,N}, \qquad C_N \leqslant \left(\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \cdot \ln(1+N)\,.$$

Asimptotinių artinių (14) ir (15) paklaidoms įvertinti reikalingos apskaičiuotos $I^0_{\tilde{\alpha}\approx\pi,N}$ reikšmės:

	$N=5$	$N=10$	$N=50$	$N=500$
$\pi \approx \frac{22}{7}$	$0,564$	$0,557$	$0,559$	$0,559$
$\pi \approx \frac{355}{113}$	$0,552$	$0,548$	$0,573$	$0,574$

Taigi turėdami visų (6) nelygybės parametrų įverčius, gauname kriterijų aproksimacijai $\pi \approx \frac{p(\varepsilon)}{q(\varepsilon)}$ pasirinkti, kai $T = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\min_{p,q} \max \left\{ \frac{\pi + \sqrt{2}}{\sqrt{2}N};\ \frac{\left(\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \ln(1+N)}{\varepsilon} \left|\pi - \frac{p}{q}\right|;\ \varepsilon I^0_{\frac{p}{q},N} \right\}. \tag{16}$$

Kai $\varepsilon = 0,1$ paimkime $N = 50$ ir iš (16) gauname (14) asimptotikos paklaidos įvertį

$$\max\left\{0,063;\ \frac{8,04}{0,1}\,0,0013;\ 0,1\cdot 0.559\right\} = 0,10.$$

Matome, kad šiuo atveju netikslinga taikyti aproksimacijos $\pi \approx \frac{22}{7}$ ir geresnį paklaidos įvertį gausime, kai $\pi \approx \frac{355}{113}$, t. y. taikydami (15) skleidinį.

Kai $\varepsilon = 0,01$ paimkime $N = 500$ ir tada

$$\max\left\{0,0064;\ \frac{12,71}{0,01}\,0,33\cdot 10^{-6};\ 0,01\cdot 0.574\right\} = 0,64\cdot 10^{-3}.$$

Pastebėkime, kad (14) ir (15) skleidiniai aprėžti atitinkamai konstantomis $9,1\cdot 10^{-5}$ ir $2,2\cdot 10^{-8}$, kai $\tau \in [0,1]$. Todėl skleidinio $x_0 \equiv 0$ paklaida, kai $\varepsilon = 0,1$ neviršija $0,063$ ir $0,0064$ esant $\varepsilon = 0,01$. Iš įverčio $\mathrm{O}(\varepsilon^{\frac{1}{8,0161}})$ gautume atitinkamai $0,75$ ir $0,56$.

Literatūra

1. C. Corduneanu, N. Gheorghiu, and H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, New York, Chelsea Publishing Company, 2 edition (1989).
2. A. Krylovas, Silpnai netiesinės hiperbolinės sistemos asimptotinio sprendinio pagrindimas, *Liet. matem. rink.*, **46**, spec. nr., 53–57 (2006).
3. A. Krylovas, Asymptotic approximation of solutions of weakly linear differential systems, *Lith. Math. J.*, **25**, 137–145 (1985); translation from Litov. Mat. Sb. **25**, No.2, 102–113 (1985).
4. V. Būda, R. Čiegis, *Skaičiuojamoji matematika*, Vilnius, TEV (1997).
5. E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, *Resonances and Small Divisors in Celestial Mechanics*, Nauka, Moscow (1979) (in Russian).

6. E. Grebenikov, Yu.A. Mitropolsky, Y.A. Ryabov, *Asymptotic Methods in Resonance Analytical Dynamics*, NY, Routledge (2004).
7. H. Masayoshi, Rational approximations to Pi and some other numbers, *Acta Arith.*, **63**(4), 335–349 (1993).

SUMMARY

A. Krylovas. On approximation of averaging operator

An algorithm for constructing approximations of averaging operators of quasi-periodical functions is presented in the paper. The algorithm can be used for constructing uniformly valid for a long time asymptotical solutions of differential equations with small parameter.

Keywords: averaging, small denominators, perturbation method, differential equations.