Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 109–114

Геометрические соображения при определении порядка факториала

Юозас Ювенциюс МАЧИС (MII)*
e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

Резюме. Показано, как можно геометрически интерпретировать формулу Стирлинга, и, более того, как геометрические соображения могут помочь в установлении неограниченных членов в асимптотической формуле логарифма факториала.

Ключевые слова: факториал, геометрическая интерпретация, формула Стирлинга.

Общеизвестно, что самая трудная часть вывода формулы Стирлинга заключается в установлении бесконечно больших членов в асимптотической формуле логарифма факториала:

$$\ln n! = (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \mathrm{O}(1). \tag{1}$$

После того, как эти члены найдены (или как-нибудь угаданы), дальнейшее не составляет большого труда (см. [1]).

В. Феллер не раз возвращался к вопросу естетственности подхода к формуле (1). В своем курсе теории вероятностей [2] он приводит соображение, принадлежащее Х. Роббинсу [3].

Очевидно неравенство

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \,\mathrm{d}x < \ln k < \int_{k}^{k+1} \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Суммируя его от 2 до n получаем

$$\int_{1}^{n} \ln x \,\mathrm{d}x < \ln n! = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n < \int_{2}^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x,$$

откуда после интегрирования

$$n\ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln 2.$$

*Работа частично поддержана Литовским государственным фондом науки и студий, грант № T-25/08.

Взяв среднее арифметическое крайних членов и отбросив ограниченные слагаемые, имеем

$$\ln n! \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n. \tag{2}$$

Тем не менее, формула (1) осталась недоказанной, поскольку разность $(n+1)\ln(n+1) - n\ln n$ является бесконечно большой порядка $\ln n$. Поэтому тогда проще уж прямо сослаться на приближенное равенство

$$\ln k = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln k \,\mathrm{d}x \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

суммируя которое по k от 2 до n получаем

$$\ln n! \approx \int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

т.е. бесконечно большую из формулы (2).

Формулу (3) легко интерпретировать геометрически (см. рис. 1).

Видим, что в положительной полуполосе $(k-1/2; k+1/2)$ (впредь мы будем ее называть k-той полосой) площадь под горизонтальной прямой $y = \ln k$ близка к площади под кривой $y = \ln x$. Столь же нагляден и рис. 2, объясняющий формулу (4).

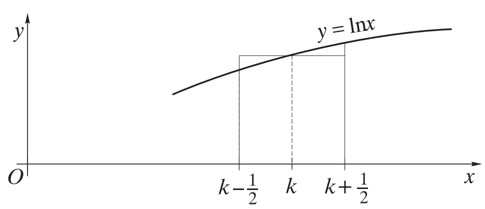

Рис. 1. Геометрический вариант формулы (3).

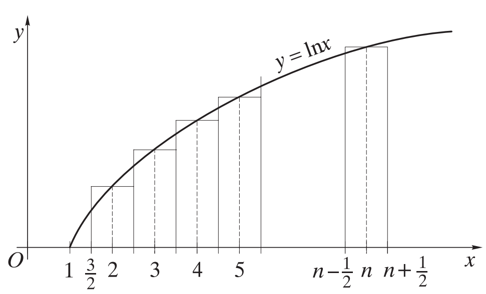

Рис. 2. Геометрический вариант формулы (4).

Оказывается, что формулу (3) можно уточнить, записав ее в виде строгих неравенств.

Во-первых, убедимся, что

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x < \ln k. \tag{5}$$

Геометрически неравенство (5) становится очевидным, если на рис. 1 провести касательную к кривой $y = \ln x$ в точке $(k; \ln k)$: площадь трапеции под касательной равна площади прямоугольника, т.е. равна $\ln k$, а график кривой $y = \ln x$ идет ниже касательной, поскольку функция $\ln x$ выпукла вверх.

Докажем (5) аналитически. Поскольку

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_{k-1/2}^{k+1/2} = (k+1/2)\ln(k+1/2) - k - 1/2 \\ - (k-1/2)\ln(k-1/2) + k - 1/2,$$

то достаточно доказать, что это выражение меньше $\ln k$, т.е. что

$$f(k) = (k+1/2)\ln(k+1/2) - (k-1/2)\ln(k-1/2) - 1 - \ln k < 0.$$

Так как

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty}\left[\Big(k-1/2\Big)\ln\frac{k+1/2}{k-1/2} + \ln\frac{k+1/2}{k} - 1\right] \\ = \lim_{k\to\infty}\left[\ln\Big(1 + \frac{1}{k-1/2}\Big)^{k-1/2} - 1\right] = \ln e - 1 = 0,$$

то достаточно убедиться, что призводная $f'(k)$ положительна,

$$f'(k) = \ln(k+1/2) - \ln(k-1/2) - \frac{1}{k} > 0.$$

Но это ясно, поскольку $f'(\infty) = 0$, а производная функции $f'(k)$

$$f''(k) = \frac{1}{k+1/2} - \frac{1}{k-1/2} + \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{k^2 - 1/4} + \frac{1}{k^2} = -\frac{1/4}{k^2(k^2-1/4)}$$

отрицательна.

Во-вторых, $\ln k$ можно сверху оценить величиной, лишь „мало“ превышающей оценку снизу. В этом нам тоже поможет геометрия. Мало того – если оценку снизу можно было получить как аналитически, так и геометрически, то оценку для $\ln k$ сверху вообще трудно угадать не пользуясь геометрическими соображениями.

Ясно, что если провести прямую через точки $A(k - 1/2; \ln(k - 1/2))$ и $M(k; \ln k)$, то площадь под нею в k-той полосе (рис. 3) будет равна

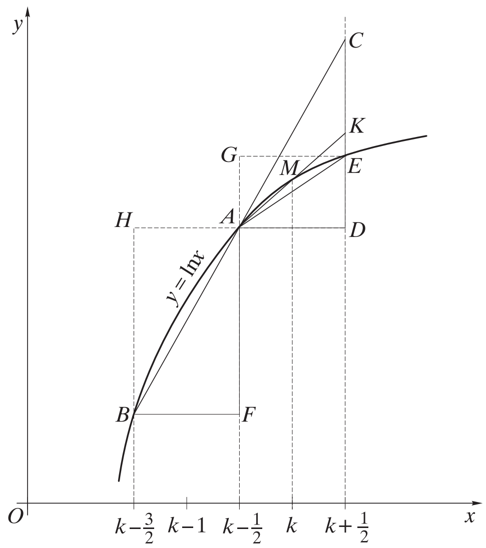

Рис. 3. К уточнению формулы (3).

$\ln k$ (разумеется, таким свойством обладает каждая прямая, проведенная через точку $(k; \ln k)$). Нам нужна прямая, которая в рассматриваемой полосе $(k-1/2; k+1/2)$ идет выше нее и выше кривой $y = \ln x$. В качестве такой прямой вполне подходит касательная к кривой $y = \ln x$ в точке $A(k-1/2; \ln(k-1/2))$. Но еще удобнее взять секущую нашей кривой, проходящую через точки $B(k-3/2; \ln(k-3/2))$ и $A(k-1/2; \ln(k-1/2))$. Обозначим через S_k площадь прямоугольника $ADEG$, высекаемого из k-той полосы горизонталями, проведенными через точки $A(k-1/2; \ln(k-1/2))$ и $E(k+1/2; \ln(k+1/2))$. Поэтому S_{k-1} будет обозначать площадь прямоугольника $BFAH$ $(k-1)$-ой полосы между горизонталями $y = \ln(k-3/2)$ и $y = \ln(k-1/2)$. Пусть секущая BA пересекает вертикальную прямую $x = k+1/2$ в точке C. Тогда треугольник ADC равен треугольнику BFA, и его площадь равна $(1/2)S_{k-1}$. Итак, площадь $\ln k$ трапеции под хордой AE меньше чем

$$\ln(k-1/2) + \frac{1}{2}S_{k-1} = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x + Q_k,$$

где Q_k – площадь криволинейного треугольника $AMEC$ между кривой и секущей AC, и тем более

$$\ln k < \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x + R_k,$$

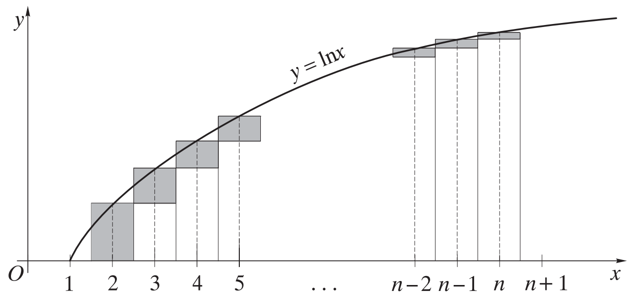

Рис. 4. К выводу формулы (1).

где R_k – площадь треугольника AEC над хордой AE. Но $R_k = (1/2)S_{k-1} - (1/2)S_k$, и, вспомнив (5), мы имеем следующее уточнение формулы (3):

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x < \ln k < \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\big(S_{k-1} - S_k\big).$$

(Как уже упоминалось, можно получить и более точные оценки сверху, но это бессмысленно: нас интересует лищь порядок $\ln n!$, и нам все равно, например, получаем ли мы оценку $\int_{1/2}^{n+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x$ или $\int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x$, поскольку они отличаются на ограниченную величину. Суммируя имеем

$$\int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x < \ln n! < \int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=2}^{n} S_{k-1} - \sum_{k=2}^{n} S_k\Big).$$

Прочтем это неравенство геометрически. Ясно, что $\sum_{k=1}^{n} S_k$ – это сумма площадей закрашенных прямоугольников на рис. 4, равная площади прямоугольника в полосе $(n - 1/2, n + 1/2)$ высотой $\ln n$, т.е. площади $\ln n$. Поэтому сумма $\sum_{k=2}^{n} S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ представляет собой площадь того же прямоугольника без площади верхнего кирпичика, а сумма $\sum_{k=2}^{n} S_k$ больше площади прямоугольника без нижнего кирпичика, – все это становится очевидным, если закрашенные прямоугольники горизонтально сдвинуть в n-тую полосу.

Следовательно, разность сумм в скобках меньше $\ln 2$, и оценка сверху тоже получена:

$$\int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x < \ln n! < \int_{3/2}^{n+1/2} \ln x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Только что полученная оценка сверху отличается от оценки снизу на величину $(1/2)\ln 2 < 1/2$, т.е. меньше постоянной.

Итак, логарифм факториала действительно задается формулой (1).

Литература

1. Ю.Ю. Мачис, О формуле Стирлинга, *Liet. matem. rink.* **47**, 526–530 (2007).
2. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения*, Т. 1, Москва, Мир (1984).
3. H.E. Robbins, Remark on Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly*, **62**, 26–29 (1955).

REZIUMĖ

J.J. Mačys. Geometriniai samprotavimai nustatant faktorialo eilę

Parodyta, kaip galima geometriškai iliustruoti Sterlingo formulę ir kaip geometriniai samprotavimai gali padėti nustatant tikrąjį faktorialo logaritmo dydį.

Raktiniai žodžiai: faktorialas, geometrinė interpretacija, Sterlingo formulė.

SUMMARY

J.J. Mačys. Geometrical reasoning in the determination of the order of factorial

It is shown here how to interpret Stirling's formula geometrically, moreover, how geometrical reasoning can serve determining the proper magnitude of the logarithm of the factorial.

Keywords: factorial, geometrical interpretation, Stirling's formula.