Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 137–141

Faktorialų formulės ir kompiuterio pagalba

Jurgis SUŠINSKAS, Juozas Juvencijus MAČYS (MII) *
el. paštas: jur@ktl.mii.lt, jmacys@ktl.mii.lt

Reziumė. Faktorialų formulių pavyzdžiu bandoma pademonstruoti, kaip mokinius būtų galima supažindinti su įprastiniu matematiko darbu naudojantis kompiuteriu.

Raktiniai žodžiai: Sterlingo formulės, Robinso formulė, faktorialas, kompiuterio pagalba.

Formulės faktorialui $n!$ apytiksliai apskaičiuoti paprastai vadinamos Sterlingo (J. Stirling, 1692–1770) formulėmis. Solidžiuose žinynuose ir analizės kursuose (žr., pvz., [1], p. 637; [2], p. 373; [3], p. 57; nurodome po kelis literatūros šaltinius – taip skaitytojui bus lengviau jų susirasti) paprastai pateikiama formulė

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}. \tag{1}$$

Jos santykinės paklaidos eilė yra $1/12n$(čia ir toliau pasvirasis brūkšnys kaip trupmenos ženklas vartojamas „amerikietiškai“ – pavyzdžiui, $1/12n$ reiškia $1/(12n)$, o ne $(1/12)n$, $1/12n + 1$ reiškia $(1/(12n)) + 1$, o ne $1/(12n + 1)$, ir pan.). H.E. Robinsas (žr. [4]; [5], p. 72–73) pasiūlė itin estetišką formulę

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}, \tag{2}$$

kurios tikslumas yra daug didesnis ir apytiksliai lygus $1/144n^2$.

Straipsnyje [6] įrodyta dar tikslesnė formulė

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}}, \tag{3}$$

kurios tikslumas dar daug didesnis – maždaug $1/1260n^5$.

Robinso pavyzdžiu pabandykime padaryti šią formulę gražesnę, darydami dešinę pusę panašią ir artimą kairiajai. Panašiausi ir nedaug didesni už kairės pusės e rodiklį $1/12n - 1/360n^3$ „gražūs“ dešinės pusės e rodikliai būtų $1/12n - 1/360(n + 1)^3$, $1/12n - 1/(360n^3 + 1)$, $1/12n - 1/361n^3$. Ištirkime juos.

*Tyrimą dalinai remia Lietuvos valstybinis mokslo ir studijų fondas, granto Nr. T-25/08.

Išsiaiškinkime, ar formulė

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360(n+1)^3}} \tag{4}$$

teisinga. Remkimės (3) formule. Akivaizdu, kad užtenka patikrinti, ar

$$-1/360n^3 + 1/1260n^5 < -1/360(n+1)^3.$$

Pasirodo, kad ši nelygybė teisinga su visais n. Iš tikrųjų, padauginę iš $7 \cdot 360n^5(n+1)^3$, turime

$$-7n^2(n+1)^3 + 2(n+1)^3 < -7n^5,$$
$$2(n+1)^3 < 7n^2(3n^2+3n+1),\ 6n+2 < 21n^4 + 19n^3 + n^2,$$

o ši nelygybė akivaizdžiai teisinga visiems n.

Dabar nagrinėkime mažesnį rodiklį $1/12n - 1/(360n^3+1)$ ir nustatykime, kada

$$-1/360n^3 + 1/1260n^5 < -1/(360n^3+1),$$

t.y.

$$1/1260n^5 < 1/360n^3(360n^3+1),$$
$$720n^3 + 2 < 7n^2.$$

Aišku, kad nelygybė neteisinga su visais n. Žinoma, tai dar nereiškia, kad formulė

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3+1}}$$

visada neteisinga, bet matome, kad ji neteisinga bent jau pakankamai dideliems n.

Liko ištirti rodiklį $1/12n - 1/361n^3$. Vėl remkimės (3) formule. Patikrinkime, kada

$$-1/360n^3 + 1/1260n^5 < -1/361n^3.$$

Išspręskime šią nelygybę. Turime $1/1260n^2 < 1/360 \cdot 361$, $n^2 > 722/7$. Vadinasi, $n^2 > 103$, $n \geqslant 11$. Taigi nelygybė

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{361n^3}} \tag{5}$$

tikrai teisinga, kai $n \geqslant 11$. Patikrinkime kompiuteriu ją mažesniems n – o gal ji teisinga ir dar bent keliems mažesniems n?

Matome (žr. 1 lentelę), jog (5) įvertis teisingas, kai $n \geqslant 11$, ir neteisingas, kai $n \leqslant 10$.

Pabandykime nustatyti, kokiu koeficientu rodiklyje reikėtų pakeisti 361, kad įvertis iš viršaus taptų teisingas su visais n. Imkime įvertį

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{xn^3}}$$

ir parinkime tokį sveikąjį x, kad įvertis būtų teisingas su visais n. Įstatykime į jį $n = 1$. Tada

$$\begin{aligned}
&1 < \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{12}-\frac{1}{x}},\\
&\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}},\\
&\frac{1}{x} < \ln\bigl(\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}}\bigr),\\
&x > 1/\ln\bigl(\sqrt{2\pi} - 11/12\bigr).
\end{aligned}$$

Pasitelkę kompiuterį, randame, kad $x \geqslant 441$. Patikrinkime, ar visada $-1/360n^3 + 1/1260n^5 < -1/441n^3$. Spręsdami šią nelygybę, gauname $9n^2 > 14$, t. y. $n \geqslant 2$. Vadinasi, formulė

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{441n^3}} \tag{6}$$

tikrai teisinga su $n \geqslant 2$. Bet jau matėme, kad ji teisinga ir su $n = 1$, t. y. (6) formulė teisinga visada. Tai atspindi ir 2 lentelė.

Vadinasi, vertindami faktorialą $n!$ iš viršaus, galime naudotis tiek (5) formule, tiek ir (6) formule. Atrodytų, kad (6) formulė patogesnė – ji teisinga visiems n, o (5) formulė – tik kai $n \geqslant 11$. Vis dėlto (5) formulė žymiai pranašesnė: faktorialus iki $n = 10$ mokame susiskaičiuoti ir be formulių, o kai $n \geqslant 11$, tai (5) formulė žymiai tikslesnė (palyginkite santykines paklaidas δ 1 lentelėje ir 2 lentelėje).

(3) formulės kairės pusės reikšmės pateikiamos 3 lentelėje.

1 lentelė. (5) formulės dešinės pusės (k_{361}) reikšmės

n	k_{361}	$\delta(\%)$	$n!$
1	0.999502	0.04980925	1
2	1.999959	0.00202895	2
3	5.999984	0.00027436	6
4	23.999985	0.00006213	24
5	119.999978	0.00001852	120
6	719.999954	0.00000644	720
7	5039.999879	0.00000241	5040
8	40319.999641	0.00000089	40320
9	362879.998997	0.00000028	362880
10	3628799.999335	0.00000002	3628800
11	39916800.035261	0.00000009	39916800
12	479001600.613066	0.00000013	479001600
13	6227020808.557365	0.00000014	6227020800
14	87178291316.306152	0.00000013	87178291200
15	1307674369619.200390	0.00000012	1307674368000

2 lentelė. (6) formulės dešinės pusės (k_{441}) reikšmės

n	k_{441}	$\delta(\%)$	$n!$
1	1.000004	0.00042929	1
2	2.000085	0.00425249	2
3	6.000095	0.00158680	6
4	24.000174	0.00072304	24
5	120.000460	0.00038349	120
6	720.001629	0.00022620	720
7	5040.007262	0.00014410	5040
8	40320.039213	0.00009726	40320
9	362880.249135	0.00006866	362880
10	3628801.822842	0.00005023	3628800
11	39916815.105563	0.00003784	39916800
12	479001739.908694	0.00002921	479001600
13	6227022232.834510	0.00002301	6227020800
14	87178307281.289908	0.00001845	87178291200
15	1307674564321.043380	0.00001501	1307674368000

3 lentelė. (3) formulės kairės pusės (k_{360}) reikšmės

n	k_{360}	$\delta(\%)$	$n!$
1	0.999494	0.05057833	1
2	1.999957	0.00212513	2
3	5.999982	0.00030286	6
4	23.999982	0.00007415	24
5	119.999970	0.00002467	120
6	719.999928	0.00001000	720
7	5039.999766	0.00000465	5040
8	40319.999035	0.00000239	40320
9	362879.995167	0.00000133	362880
10	3628799.971413	0.00000079	3628800
11	39916799.804497	0.00000049	39916800
12	479001598.480102	0.00000032	479001600
13	6227020786.748124	0.00000021	6227020800
14	87178291071.842361	0.00000015	87178291200
15	1307674366637.828650	0.00000010	1307674368000

Taigi faktorialams įvertinti teisinga labai tiksli formulė

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{361n^3}}\ (n > 10).$$

Literatūra

1. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1970).
2. Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Физматгиз, Москва (1959).
3. G. Fichtengolcas, *Matematinės analizės pagrindai*, t. 2, Mintis, Vilnius (1967).
4. H.E. Robbins, Remark on Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly*, **62**, 26–29 (1955).
5. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения*, Мир, Москва (1984).
6. Ю.Ю. Мачис, О формуле Стирлинга, *Liet. mat. rink.*, **47**, 526–530 (2007).

SUMMARY

J. Sušinskas, J.J. Mačys. Factorial formulae and computer-aided research

We try to demonstrate how it is possible to acquaint students with the usual computer-aided research of a mathematician.

Keywords: factorial, Stirling's formulae, Robbins' formula, computer-aided research.