Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 142–148

Iškilosios funkcijos ir nelygybės vidurinėje mokykloje

Juozas ŠINKŪNAS (VPU)
e-mail: juozas.sinkunas@vpu.lt

Reziumė. Remiantis funkcijos iškilumo aukšĘtyn (žemyn) savybėmis, įrodytos vidurkių nelygybės, įrodinėjamos trigonometrinės ir geometrinės nelygybės.

Raktiniai žodžiai: funkcija, iškila funkcija, vidurkiai, trigonometrinės ir geometrinės nelygybės.

Reformuojant mokyklą buvo sumažintas matematikos pamokų skaičius, sumažėjo ir matematikos kurso apimtis. Naujai rengiamose XI–XII klasių matematikos programose norima dar labiau susiaurinti matematikos kursą. Kita vertus, aukštojo mokslo reformatoriai tikisi kokybiškų matematikos studijų universitetuose. Tokioms studijoms būsimieji studentai turi ruoštis jau vidurinėje mokykloje. Matematikai gabiems mokiniams reikėtų rasti papildomų ugdymo valandų matematikos gilesnėms studijoms. Mokinys turėtų turėti galimybę pasirinkti keleto valandų papildomų matematikos modulių, skirtų skaičiavimo įgūdžiams lavinti, mokytis analizuoti, įrodinėti. Vienas iš tokių modulių galėtų būti ir iškilųjų funkcijų savybių taikymas sprendžiant ekstremumų uždavinius, įrodinėjant trigonometrines ir geometrines nelygybes.

1 APIBRĖŽIMAS. Funkcija $f\colon (a;b) \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vadinama iškila žemyn (aukštyn), jeigu bet kuriems $x_1, x_2 \in (a;b)$ galioja nelygybė

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{1}$$

Jeigu lygybė galioja tik tada, kai $x_1 = x_2$, funkcija f vadinama griežtai iškila žemyn (aukštyn).

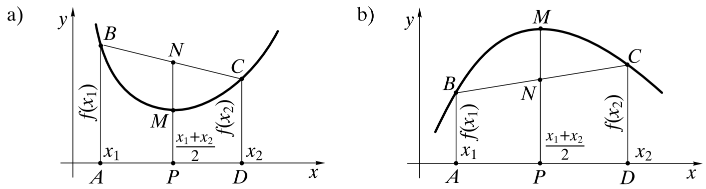
Toliau nagrinėsime tik griežtai iškilas funkcijas ir žodį ” griežtai” praleisime.

Išsiaiškinsime funkcijos iškilumo žemyn (aukštyn) geometrinę prasmę (žr. 1 pav. a) ir b)).

Jeigu funkcija f intervale $(a;b)$ yra iškila žemyn (aukštyn), tai bet kuriame intervale $[x_1, x_2] \in (a;b)$ funkcijos grafiko taškai yra žemiau (aukščiau) kirstinės, jungiančios taškus $B(x_1, f(x_1))$ ir $C(x_2, f(x_2))$ (ordinatė $PM = f(\frac{x_1+x_2}{2})$ yra mažesnė (didesnė) už trapecijos $ABCD$ vidurinę liniją $PN = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$).

Remdamiesi apibrėžimu, ištirsime kai kurių funkcijų iškilumą.

1. Įrodysime, kad funkcija $f(x) = \sin x$ intervale $[0;\pi]$ yra iškila aukštyn.



1 pav.

Įrodymas. Jeigu $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \pi$, tai $0 \leqslant \frac{x_1+x_2}{2} \leqslant \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1-x_2}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Taigi $\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} = \sin\frac{x_1+x_2}{2} \cdot \cos\frac{x_1-x_2}{2} \leqslant \sin\frac{x_1+x_2}{2}$, nes $\cos\frac{x_1-x_2}{2} \leqslant 1$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$. Vadinasi, funkcija $f(x) = \sin x$ intervale $[0; \pi]$ yra iškila aukštyn.

Analogiškai įrodoma, kad funkcija $f(x) = \cos x$ intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ yra iškila aukštyn, o funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ ir $f(x) = \operatorname{ctg} x$ intervale $(0; \frac{\pi}{2})$ yra iškilos žemyn.

2. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$ yra iškila žemyn, nes

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{2}{x_1+x_2} - \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} = -\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1+x_2)} \leqslant 0$$

su bet kuriais $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$.

Analogiškai įrodoma, kad funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, yra iškila žemyn.

3. Įrodysime, kad funkcija $f(x) = \lg x$, $x \in (0; +\infty)$, yra iškila aukštyn.

Įrodymas. Turime: $\lg\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{\lg x_1+\lg x_2}{2} = \lg\frac{x_1+x_2}{2} - \lg\sqrt{x_1x_2} = \lg\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} \geqslant 0$, nes $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1x_2}$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$. Taigi funkcija $f(x) = \lg x$ yra iškila aukštyn.

Pastaba. Tiriant funkcijų savybes išvestinių pagalba, funkcijos iškilumą galima nustatyti remiantis šia teorema:

Funkcija $f\colon (a; b) \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *turinti antrąją išvestinę, yra iškila žemyn (aukštyn) tada ir tik tada, kai* $f'' \geqslant 0$ *(*$f'' \leqslant 0$*) intervale* $(a; b)$.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^4$, $x \in \mathbf{R}$, yra iškila žemyn, nes $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$.

1 TEOREMA. *Jeigu funkcija* $f\colon (a; b) \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *yra iškila žemyn (aukštyn), tai* $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b)$ *teisinga nelygybė*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \qquad (2)$$

Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Įrodymas. Teoremą įrodysime tik atskiriems n atvejams.

1 atvejis, kai $n=4$. Kadangi funkcija f yra iškila žemyn (aukštyn), tai

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}$$

$$\underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

Analogiškai įrodoma, kad (2) nelygybė teisinga, kai $n=2^k$, $k=3,4,5,\dots$.

2 atvejis, kai $n=3$. Šiuo atveju turime:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+x_1+x_2+x_3}{4}\right) \leqslant (\geqslant) \frac{1}{4} f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$$

$$+\frac{1}{4} f(x_1)+ + \frac{1}{4} f(x_2)+\frac{1}{4} f(x_3) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$$

$$\underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x_1=x_2=x_3$.

Nesunku įrodyti (2) nelygybę ir atvejais, kai $n=6k$, $k=1,2,3,\dots$.

Remdamiesi 1 teorema, įrodysime nelygybes tarp n teigiamų skaičių aritmetinio (A_n), geometrinio (G_n), kvadratinio (K_n) ir harmoninio (H_n) vidurkių.

2 TEOREMA. *Teigiamų skaičių* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *vidurkiams teisingos nelygybės:*

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n. \tag{3}$$

Vidurkiai lygūs tada ir tik tada, kai visi skaičiai yra lygūs.

Įrodymas. 1) Pirmiausia įrodysime, kad $G_n \leqslant A_n$. Nagrinėkime funkciją $f(x)=\lg x$, $x\in(0;+\infty)$, kuri yra iškila aukštyn. Todėl teisinga nelygybė:

$$\lg\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqslant \frac{\lg a_1+\lg a_2+\dots+\lg a_n}{n} = \lg(a_1a_1\dots a_n)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_1a_2\dots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n}, \quad \text{t. y.} \quad G_n \leqslant A_n.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a_1=a_2=\dots=a_n$.

2) Įrodysime, kad $H_n \leqslant G_n$.

Nagrinėkime n teigiamų skaičių $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ ir jiems pritaikykime geometrinio ir aritmetinio vidurkių nelygybę.

Turime:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n} \Rightarrow \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_1\dots a_n},$$

t. y. $H_n \leqslant G_n$. Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3) Įrodysime, kad $A_n \leqslant K_n$.

Nagrinėkime funkciją $f(x) = x^2$, $x \in (0; +\infty)$, kuri yra iškila žemyn. Taigi, bet kuriems teigiamiems skaičiams $a_1, a_2, \ldots, a_n$ galioja nelygybė:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \Rightarrow$$

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A_n,$$

t. y. $K_n \geqslant A_n$.

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Vadinasi, $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n$.

Remdamiesi (2) ir (3) nelygybėmis, išspręsime keletą uždavinių. Daug uždavinių, sprendžiamų remiantis (3) nelygybėmis, galima rasti [1] knygelėje.

1 pavyzdys. Jeigu α, β ir γ yra trikampio kampų didumai, tai teisingos nelygybės:

1) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

2) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$.

Įrodymas. 1) Funkcija $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, $x \in [0; \pi]$ yra iškila aukštyn, todėl

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Kita vertus, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Lygybė galima tik tada, kai $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.

2) Kadangi funkcija $f(x) = \sin x$ intervale $[0; \pi]$ yra iškila aukštyn, tai

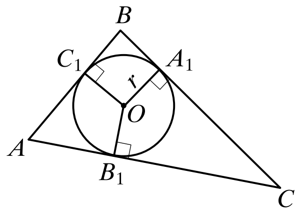
$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \leqslant \sin\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2} \leqslant \sin\frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \frac{\sin\gamma + \sin\alpha}{2} \leqslant \sin\frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Sudėję šias lygybes gauname:

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &\leqslant \sin\frac{\alpha + \beta}{2} + \sin\frac{\beta + \gamma}{2} + \sin\frac{\gamma + \alpha}{2} \\ &= \sin\frac{\pi - \gamma}{2} + \sin\frac{\pi - \alpha}{2} + \sin\frac{\pi - \beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2};\end{aligned}$$

2 pavyzdys. Iš visų trikampių, apibrėžtų apie spindulio r apskritimą, rasime mažiausio perimetro trikampį.

Sprendimas. Sakykime, apie duotąjį apskritimą apibrėžtas trikampis ABC, kurio kampų didumai yra α, β ir γ (žr. 2 pav.). Kadangi $AB_1 = AC_1 = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $CB_1 =$



2 pav.

$CA_1 = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, $BA_1 = BC_1 = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, tai $P_{ABC} = 2r(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2})$. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ intervale $(0; \pi)$ yra iškila žemyn, tai

$$P = 2r\Big(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}\Big) \geqslant 2 \cdot 3r \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = 6r \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}r.$$

Lygybė galima, t. y. perimetras yra mažiausias, kai $\alpha = \beta = \gamma$. Taigi apie apskritimą apibrėžto lygiakraščio trikampio perimetras yra mažiausias.

3 pavyzdys. Jeigu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – n-kampio kraštinių ilgiai, o $P = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ – perimetras, tai teisinga nelygybė

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{P - a_k} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

(Moksleivių matematikos olimpiados: Vokietija 1967, Anglija 1976.)

Įrodymas. Sakykime, kad $b_k = \frac{a_k}{P}$. Tada $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 1$ ir $\frac{a_k}{P - a_k} = \frac{b_k}{1 - b_k}$. Taigi reikia įrodyti, kad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{1 - b_k} \geqslant \frac{n}{n-1}, \quad \text{kai} \quad \sum_{k=1}^{n} b_k = 1, b_k > 0.$$

Nagrinėkime funkciją $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \in (0; 1)$. Ji yra iškila žemyn, nes $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0$. Vadinasi,

$$\frac{\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}}{1 - \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\Big(\frac{b_1}{1 - b_1} + \frac{b_2}{1 - b_2} + \cdots + \frac{b_n}{1 - b_n}\Big)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{1 - b_k} \geqslant n \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}.$$

Uždaviniai

1. Jeigu α, β, γ – smailiojo trikampio kampai, tai teisingos nelygybės:
a) $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$; b) $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$;
c) $\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma} \geqslant 6$; d) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\sqrt{3}$;
e) $\operatorname{ctg}\frac{1}{\alpha}+\operatorname{ctg}\frac{1}{\beta}+\operatorname{ctg}\frac{1}{\gamma} \leqslant \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$; f) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma \geqslant \sqrt{3}$.

2. Jeigu α, β, γ – trikampio kampai, tai teisingos nelygybės:
a) $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant 6$; b) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;
c) $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma} \geqslant 12$; d) $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;
e) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}$; f) $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} \geqslant 2\sqrt{3}$;
g) $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^3 \geqslant 9\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
h) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leqslant \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$;
i) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\beta+\gamma}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{4} \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Įrodykite.

3. Į spindulio R apskritimą įbrėžtas trikampis ABC ir apie apskritimą apibrėžtas trikampis KLM. Įrodykite, kad $P_{ABC} \leqslant \frac{1}{2}P_{KLM}$.

4. Jeigu a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, o r ir R – įbrėžto ir apibrėžto apskritimų spinduliai, tai $6\sqrt{3}r \leqslant a+b+c \leqslant 3\sqrt{3}R$. Įrodykite.

5. Trikampio ABC vidinių kampų A, B ir C pusiaukampinės kerta apie šį trikampį apibrėžtą apskritimą taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad trikampio ABC perimetras ne didesnis už trikampio $A_1B_1C_1$ perimetrą.

6. Tarp visų trikampių, apibrėžtų apie spindulio r apskritimą, raskite mažiausio ploto trikampį.

7. Tarp visų trikampių, kurių vienas kampas lygus 30°, ir apibrėžtų apie spindulio r apskritimą, raskite mažiausio perimetro trikampį.

8. Tarp visų trikampių, įbrėžtų į spindulio R apskritimą, raskite didžiausio ploto trikampį.

9. Tarp visų trikampių, kurių vienas kampas lygus 30°, ir įbrėžtų į spindulio R apskritimą, raskite mažiausio ploto trikampį.

10. Sakykime, kad a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, S – trikampio plotas, P – trikampio perimetras, r – įbrėžto apskritimo spindulys, o R – apibrėžto apskritimo spindulys. Įrodykite nelygybes:
1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9r}{2S}$; 2) $S \leqslant \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$; 3) $P^2 \geqslant 108r^2$; 4) $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$;
5) $\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} < 2$; 6) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{1}{2Rr}$.

Literatūra

1. J. Šinkūnas, *Ekstremumai be išvestinių*, TEV (2008).

SUMMARY

J. Šinkūnas. Convex functions and inequalities in the secondary school

A function $f\colon D_f \to \mathbf{R}$ is called convex if for any $x, y \in D_f$ the inequality $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ holds. We prove the main property of the convex fonctions (inequality (4)) and also the inequalities which the arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means of several positive numbers satisfy. Then we prove some trigonometric and geometric inequalities.

Keywords: function, convex function, arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means, trigonometric and geometric inequalities.