Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 386–388

Apie naujus Ramachandran–Rao charakterizacijos stabilumo įverčius

Romanas JANUŠKEVIČIUS (VPU), Olga JANUŠKEVIČIENĖ* (VPU, MII)
el. paštas: romjan@vpu.lt

Reziumė. Yra žinoma, kad jei X, X_1, X_2, ..., X_n yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir prie tam tikrų sąlygų empirinio vidurkio $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ ir monomo X skirstiniai sutampa, tai atsitiktiniai dydžiai X, X_1, X_2, ..., X_n turi Koši skirstinį. Darbe išnagrinėtas šios charakterizacijos stabilumo įvertis.

Raktiniai žodžiai: charakterizacija, stabilumo įverčiai, Koši skirstinys.

B. Ramachandran ir C.R. Rao [1] įrodė, kad jei $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o empirinio vidurkio $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ ir monomo X skirstiniai sutampa bent dviem kintamojo n reikšmėms $n = j_1$ ir $n = j_2$ tokioms, kad santykis $\log j_1/\log j_2$ yra iracionalus, tai atsitiktiniai dydžiai $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ turi Koši skirstinį.

Darbe [2] įrodyta, kad jei paminėti statistikų $\overline{X}(n)$ ir X skirstiniai bent dviem n reikšmėms $n = j_1$ ir $n = j_2$ sutampa ne tiksliai, bet su paklaida ε, tai atsitiktinių dydžių $X, X_1, \ldots, X_n$ skirstiniai yra artimi λ-metrikos prasme Koši skirstiniui.

Darbe [2] gauta, kad paminėtas artumas yra laipsninės eilės, tačiau pats stabilumo laipsnis nebuvo įvertintas. Mūsų darbo tikslas – įvertinti šį laipsnį, t.y. gauti Ramachandran–Rao charakterizacijos [1] stabilumo įvertį λ-metrikoje.

Tuo tikslu priminsime λ-metrikos apibrėžimą:

$$\lambda(U, V) = \min_{T>0} \max\left\{\frac{1}{2}\max_{|t|\leqslant T}\left|f_U(t) - f_V(t)\right|, \frac{1}{T}\right\},$$

kur $f_U(t)$ ir $f_V(t)$ yra atitinkamai atsitiktinių dydžių U ir V charakteristinės funkcijos.

TEOREMA. *Tarkime, kad $X, X_1, \ldots, X_{j_1}, \ldots, X_{j_2}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, o j_1 ir j_2 yra natūralieji skaičiai, kurių logaritmų santykis $\log j_1/\log j_2$ $(2 \leqslant j_1 < j_2)$ yra iracionalus. Tarkime, be to, kad empiriniai vidurkiai $\overline{X}(j_1)$ ir $\overline{X}(j_2)$ beveik sutampa su X šia prasme:*

$$\lambda\big(X, \overline{X}(j_1)\big) \leqslant \varepsilon, \quad \lambda\big(X, \overline{X}(j_2)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

* Autorės darbą parėmė Lietuvos valstybinis mokslo ir studijų fondas, projekto registracijos Nr. T-15/07

Jei, be to, egzistuoja realus $z_* \neq 0$ *toks, kad*

$$\operatorname{Im} \log E \exp(i z_* X) = 0, \tag{2}$$

tai egzistuoja atsitiktinis dydis X*, turintis Koši skirstinį, ir konstanta* $C > 0$ *tokia, kad bet kuriam* i

$$\lambda(X_i, Y) \leqslant C\varepsilon^{1/(1+36821 \log j_1 j_2)}. \tag{3}$$

Įrodymas. Iš autorių darbo [2] gauname, kad jei $f(z)$ – atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija, tai

$$\Bigl| f(z) - \exp\bigl\{ -|\Lambda_\theta| \exp(i D_\theta \operatorname{sign} z)|z|(\theta\varkappa)^{-1}\bigr\}\Bigr| \leqslant C_1(\varepsilon + \varepsilon^{\Delta}), \quad |z| \leqslant 1/\varepsilon, \tag{4}$$

kur

$$\begin{aligned}
\Lambda_\theta &= j_1 \log f(\theta\varkappa/j_1),\\
D_\theta &= \arctan(\operatorname{Im} \Lambda_\theta / \operatorname{Re} \Lambda_\theta),\\
\theta &= \inf\bigl\{|u|\colon\ |f(u\varkappa)| = 1/2\bigr\},
\end{aligned}$$

o $\varkappa$ yra apibrėžiamas žemiau, Δ – teigiama konstanta.

Parinkime dabar $\varkappa$ taip, kad

$$\theta\varkappa/j_1 = \varkappa. \tag{5}$$

Iš (2) ir (5) gauname, kad $\operatorname{Im} \Lambda_\theta = 0$. O tai reiškia, kad

$$D_\theta = \arctan(\operatorname{Im} \Lambda_\theta / \operatorname{Re} \Lambda_\theta) = 0. \tag{6}$$

Konstantą Δ formulėje (4) galima įvertinti diofantinių aproksimacijų metodu. Yra žinoma, kad egzistuoja konstantos $\delta_1 = \delta_1(j_1, j_2)$ ir $\delta_2 = \delta_2(j_1, j_2)$ tokios, kad bet kuriems natūraliesiems skaičiams r ir k ir bet kuriems natūraliesiems skaičiams j_1 ir j_2 su iracionaliuoju santykiu $\log j_1 / \log j_2$ yra teisinga tokia nelygybė:

$$\bigl|r \log j_1 - k \log j_2\bigr|^{\alpha} > \delta_2 r^{-\delta_1}. \tag{7}$$

Formulėje (7) konstantas δ_1 ir δ_2 N. Gouillon darbo [3] pagrindu galima parinkti taip:

$$\delta_1 = 36821 \log j_1 \log j_2, \quad \delta_2 = 23^{36821 \log j_1 \log j_2}. \tag{8}$$

Yra žinoma, kad stabiliųjų skirstinių klasę sudaro aibė skirstinių, priklausančių nuo keturių parametrų $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\gamma \in (-\infty; +\infty)$, $\lambda \in (0; +\infty)$. Stabiliojo skirstinio charakteristinę funkciją $y(t)$ galima užrašyti taip:

$$\log y(t) = it\gamma - \lambda|t|^{\alpha}\omega(t, \alpha, \beta), \tag{9}$$

kur

$$\begin{aligned}
\omega(t, \alpha, \beta) &= \begin{cases} \exp\bigl(i\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha) \operatorname{sign} t\bigr), & \text{kai } \alpha \neq 1,\\ 1 + i\beta\frac{2}{\pi} \log|t| \operatorname{sign} t, & \text{kai } \alpha = 1, \end{cases}\\
K(\alpha) &= 1 - |1 - \alpha| = \min(\alpha, 2 - \alpha).
\end{aligned}$$

Formulėje (9) paėmę $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\lambda = |\Lambda_\theta|(\theta\varkappa)^{-1} = |\Lambda_\theta|/(j_1\varkappa)$, iš sąryšių (1), (8) ir (9) bei autorių teoremos [2] gauname (3).

Teorema įrodyta.

Literatūra

1. B. Ramachandran, C.R. Rao, Solutions of functional equations arising in some regression problems and a characterization of the Cauchy law, *Sankhyā*, ser. A, **32** (1), 1–30 (1970).
2. R. Januškevičius, O. Januškevičienė, Apie stabilumo įverčius be simetriškumo sąlygos, *Liet. mat. rink.*, **46**(spec. nr.), 439–441 (2006).
3. N. Gouillon, Explicit lower bounds for linear forms in two logarithms, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **18**(1), 125–146 (2006).

SUMMARY

R. Januškevičius, O. Januškevičienė. On new stability estimations in Ramachandran–Rao characterization

B.Ramachandran and C.R.Rao have proved that if $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ are i.i.d. random variables and if distributions of sample mean $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ and monomial X are coincident at least at two points $n = j_1$ and $n = j_2$ such that $\log j_1 / \log j_2$ is irrational, then X follows a Cauchy law. Assuming that condition of coincidence of $\overline{X}(n)$ and X are fulfilled at least for two n values, but only approximately, with some error ε in metric λ, we prove that, in certain sense, characteristic function of X is close to the characteristic function of the Cauchy distribution and construct stability estimation.

Keywords: Cauchy distribution, sample mean, identically distributed statistics, stability estimations.