Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 68–73

Stochastinių logistinių augimo modelių su vėlinimu apytiksliai stacionarieji sprendiniai ir parametrų įvertinimai $\boldsymbol{L}^1$ atstumo metodu

Petras RUPŠYS (LŽŪU)
el. paštas: petras.rupsys@lzuu.lt

Biologijoje, ekologijoje, finansuose ir kitose srityse modeliuojamo objekto kinetika dažniausiai išreiškiama determinuotu logistiniu modeliu (Verhulsto, Gompertco, Ričardso). Pastaruoju metu augimo proceso kinetikai apibrėžti dažnai naudojamos stochastinės diferencialinės lygtys su vėlinimu. Be to, augimo modelio dreifo ir difuzijos funkcijos priklauso nuo keleto parametrų, kurių fizikinė prasmė dažniausiai yra suvokiama, pavyzdžiui, vidinis augimo tempas, prisotinimo lygis, variacijos amplitudė ir pan. Žinodami fizikinę parametrų prasmę ir augimo proceso pobūdį, galime grubiai įvertinti parametrų skaitines reikšmes. Tačiau, panaudodami eksperimento metu surinktus stebėjimų duomenis, statistiniais metodais galime tiksliau įvertinti parametrų skaitines reikšmes. Darbe nagrinėsime logistinio tipo augimo modelių parametrų apytikslius įvertinimus. Parametrų įvertinimui naudosime Fokker-Planck lygties apytikslius stacionariuosius sprendinius ir L^1 atstumo procedūrą.

Stochastinį logistinį augimo procesą su vėlinimu bei adityviuoju ir multiplikatyviuoju triukšmu užrašome tokiu pavidalu

$$\mathrm{d}X(t) = rX(t)G(X(t))\,\mathrm{d}t - \alpha X(t-\tau) + \sigma \begin{cases} \mathrm{d}W(t) \\ X(t)\,\mathrm{d}W(t) \end{cases}, \quad X(s) = \varphi(s),$$
$$s \in [t_0 - \tau; t_0], \tag{1}$$

čia r yra vadinamas vidiniu augimo proceso tempu, K – prisotinimo lygiu, $W(t)$ yra standartinis Brauno judėjimas (baltasis triukšmas), σ – triukšmo amplitudė, τ – vėlinimo dydis, $\varphi(s)$ – žinoma funkcija, $G(x(t)) = 1 - \frac{x(t)}{K}$ (Verhulsto dėsniui), $G(x(t)) = \ln\frac{K}{x(t)}$ (Gompertco dėsniui), $G(x(t)) = 1 - (\frac{x(t)}{K})^\beta, \beta \geqslant -1$ (Ričardso dėsniui).

Stochastinio proceso (1) tikimybinį tankį $p(x,t)$ galime apskaičiuoti naudodami Fokker–Planck lygtį [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int (rxG(x) - \alpha x_\tau)p(x,t;x_\tau,t-\tau)\,\mathrm{d}x_\tau$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\int \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x)p(x,t;x_\tau,t-\tau)\,\mathrm{d}x_\tau, \tag{2}$$

čia $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{adityvusis triukšmas,} \\ x^2 & \text{multiplikatyvusis triukšmas.} \end{cases}$

Esant adityviajam triukšmui, apytikslis stacionarusis tankis, tenkinantis lygtį (2), turi pavidalą

$$p^a_{st}(x) = N_c \exp\left(\frac{2V_{eff}(x)}{\sigma^2}\right), \tag{3}$$

čia efektyvusis potencialas $V_{eff}(x)$ apskaičiuojamas lygybe

$$V_{eff}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (rxG(x) - \alpha x_\tau) \times \exp\left(- \frac{\left(x_\tau - x - f^{(0)}(x)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \mathrm{d}x_\tau \right) \mathrm{d}x, \tag{4}$$

$f^{(0)}(x) = rxG(x) - \alpha x$. Normalizavimo konstanta N_c tenkina sąlygą

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} p^a_{st}(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{5}$$

Multiplikatyviojo triukšmo atveju apytikslis stacionarusis tankis, tenkinantis lygtį (2), turi tokį pavidalą

$$p^a_{st}(x) = \frac{N_c}{D_{eff}(x)} \exp\left(\int_0^x \frac{f_{eff}(x')}{D_{eff}(x')}\,\mathrm{d}x'\right), \tag{6}$$

$$f_{eff}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D^{(0)}(x)\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (rxG(x) - \alpha x_\tau) \exp\left(-\frac{\left(x_\tau - x - f^{(0)}(x)\tau\right)^2}{4D^{(0)}(x)\tau}\right) \mathrm{d}x_\tau, \tag{7}$$

$$D_{eff}(x) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{4\pi D^{(0)}(x)\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{\left(x_\tau - x - f^{(0)}(x)\tau\right)^2}{4D^{(0)}(x)\tau}\right) \mathrm{d}x_\tau, \tag{8}$$

$D^{(0)}(x) = \sigma^2 x^2/2.$

Logistinių augimo modelių Fokker–Planck lygties (2) apytiksliai stacionarieji sprendiniai gali būti gauti ištiesinus stochastinę diferencialinę lygtį stacionariojo taško x_* aplinkoje. Tikslinga tiesinimą atlikti stacionariojo taško aplinkoje, nes stochastinės lygties sprendinių svyravimas vyksta kaip tik stacionariojo taško aplinkoje. Stacionarieji taškai apibrėžiami taip: Verhulsto modeliui $x_* = \frac{K(r-\alpha)}{r}$, Gompertco modeliui $x_* = Ke^{-\frac{\alpha}{r}}$, Ričardso modeliui $x_* = K(\frac{r-\alpha}{r})^{\frac{1}{\beta}}$.

Adityvusis atvejis. Ištiesinti stochastiniai augimo modeliai turi tokius pavidalus:

$$\mathrm{d}X(t) = \left(\frac{K(r-\alpha)^2}{r} - (r-2\alpha)X(t) - \alpha X(t-\tau)\right)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t) \quad \text{(Verhulsto modelis),} \tag{9}$$

$$\mathrm{d}X(t) = \Big(rKe^{-\frac{\alpha}{r}} - (r-\alpha)X(t) - \alpha X(t-\tau)\Big)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$$
$$\text{(Gompertco modelis)}, \tag{10}$$
$$\mathrm{d}X(t) = \bigg(K\beta(r-\alpha)\Big(\frac{r-\alpha}{r}\Big)^{\frac{1}{\beta}} - (\beta(r-\alpha)-\alpha)X(t) - \alpha X(t-\tau)\bigg)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t) \quad \text{(Ričardso modelis)} \tag{11}$$

Ištiesintiems augimo modeliams (9)–(11), naudodami lygybes (3)–(5), apskaičiuojame apytikslius stacionariuosius sprendinius. Apytiksliai stacionarieji sprendiniai turi pavidalus:

$$p^a_{st}(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{r-\alpha}{\pi(1+\alpha\tau)}}\exp\bigg(-\frac{r-\alpha}{\sigma^2(1+\alpha\tau)}\Big(x - \frac{K(r-\alpha)}{r}\Big)^2\bigg)$$
$$\text{(Verhulsto modeliui)}, \tag{12}$$
$$p^a_{st}(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{r}{\pi(1+\alpha\tau)}}\exp\bigg(-\frac{r}{\sigma^2(1+\alpha\tau)}\Big(x - Ke^{-\frac{\alpha}{r}}\Big)^2\bigg)$$
$$\text{(Gompertco modeliui)}, \tag{13}$$
$$p^a_{st}(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\beta(r-\alpha)}{\pi(1+\alpha\tau)}}\exp\bigg(-\frac{\beta(r-\alpha)}{\sigma^2(1+\alpha\tau)}\Big(x - K\Big(\frac{r-\alpha}{r}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big)^2\bigg)$$
$$\text{(Ričardso modeliui)}. \tag{14}$$

Be to, ištiesintiems augimo modeliams (9)–(11) galime rasti tiksliuosius sprendinius [2]. Turime:

$$p_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R(\tau)}}\exp\left(-\frac{\Big(x - \frac{K(r-\alpha)}{r}\Big)^2}{2R(\tau)}\right),$$
$$R(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1+\alpha\varpi^{-1}\sin(\varpi\tau)}{r-2\alpha+\alpha\cos(\varpi\tau)}\right), & \alpha > \frac{r}{3} \geqslant 0 \\ \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1+\alpha\varpi^{-1}\sinh(\varpi\tau)}{r-2\alpha+\alpha\cosh(\varpi\tau)}\right), & \frac{r}{3} > \alpha \geqslant 0 \\ \frac{\sigma^2}{2}(1+(r-2\alpha)\tau), & r = 3\alpha > 0 \end{cases}, \tag{15}$$
$$\varpi = \sqrt{|(r-2\alpha)^2 - \alpha^2|} \quad \text{(Verhulsto modeliui)},$$
$$p_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R(\tau)}}\exp\left(-\frac{\Big(x - Ke^{-\frac{\alpha}{r}}\Big)^2}{2R(\tau)}\right),$$

$$R(\tau)=\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1+\alpha\varpi^{-1}\sin(\varpi\tau)}{r-\alpha+\alpha\cos(\varpi\tau)}\right), & \alpha>\frac{r}{2}\geqslant 0\\ \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1+\alpha\varpi^{-1}\sinh(\varpi\tau)}{r-\alpha+\alpha\cosh(\varpi\tau)}\right), & \frac{r}{2}>\alpha\geqslant 0\\ \frac{\sigma^2}{2}\left(1+(r-\alpha)\tau\right), & r=2\alpha>0\end{cases}, \tag{16}$$

$$\varpi=\sqrt{|(r-\alpha)^2-\alpha^2|}\quad \text{(Gompertco modeliui)},$$

$$p_{st}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R(\tau)}}\exp\left(-\frac{\left(x-K\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^2}{2R(\tau)}\right),$$

$$R(\tau)=\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1+\alpha\varpi^{-1}\sin(\varpi\tau)}{\beta(r-\alpha)-\alpha+\alpha\cos(\varpi\tau)}\right), & 2\alpha>\beta(r-\alpha)\geqslant 0,\\ \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1+\alpha\varpi^{-1}\sinh(\varpi\tau)}{\beta(r-\alpha)-\alpha+\alpha\cosh(\varpi\tau)}\right), & \beta(r-\alpha)>2\alpha\geqslant 0\\ \frac{\sigma^2}{2}\left(1+(\beta(r-\alpha)-\alpha)\tau\right), & \beta(r-\alpha)=2\alpha>0\end{cases}, \tag{17}$$

$$\varpi=\sqrt{|(\beta(r-\alpha)-\alpha)^2-\alpha^2|}\quad \text{(Ričardso modeliui)}.$$

Multiplikatyvusis atvejis. Ištiesinti stochastiniai augimo modeliai turi tokius pavidalus:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t)&=\left(\frac{K(r-\alpha)^2}{r}-(r-2\alpha)X(t)-\alpha X(t-\tau)\right)\mathrm{d}t\\&\quad+\sigma X(t)\,\mathrm{d}W(t)\quad \text{(Verhulsto modelis)},\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t)&=\left(rKe^{-\frac{\alpha}{r}}-(r-\alpha)X(t)-\alpha X(t-\tau)\right)\mathrm{d}t\\&\quad+\sigma X(t)\,\mathrm{d}W(t)\quad \text{(Gompertco modelis)},\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t)&=\left(K\beta(r-\alpha)\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{\beta}}-(\beta(r-\alpha)-\alpha)X(t)-\alpha X(t-\tau)\right)\mathrm{d}t\\&\quad+\sigma X(t)\,\mathrm{d}W(t)\quad \text{(Ričardso modelis)}.\end{aligned}\tag{20}$$

Ištiesintiems augimo modeliams (18)–(20), naudodami lygybes (7)–(8), (5), apskaičiuojame apytikslius stacionariuosius tankius:

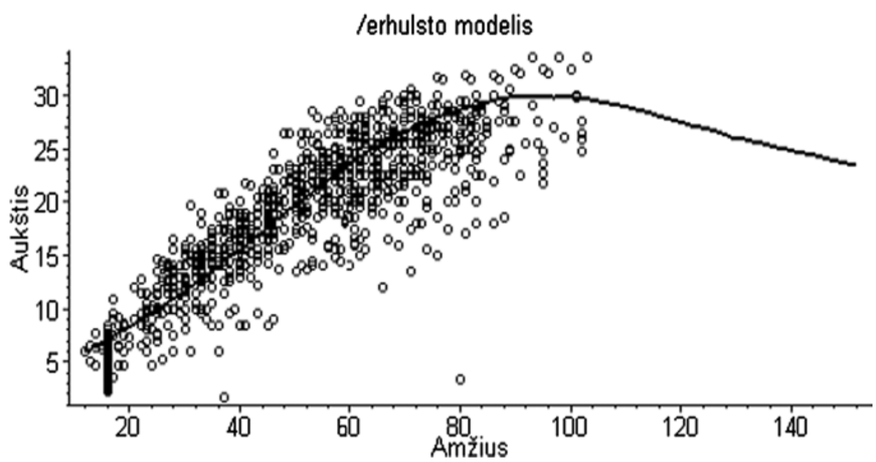
$$\begin{aligned}p_{st}^{a}(x)&=\left(\frac{K(r-\alpha)^2}{r(1-\alpha\tau)\sigma^2}\right)^{\frac{r-\alpha}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}}\Big/\Gamma\left(\frac{r-\alpha}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}\right)x^{-\left(\frac{r-\alpha}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}+1\right)}\\&\quad\times\exp\left(-\frac{K(r-\alpha)^2}{r(1-\alpha\tau)\sigma^2 x}\right)\quad \text{(Verhulsto modeliui)},\end{aligned}\tag{21}$$

$$p_{st}^{a}(x) = \left(\frac{rKe^{-\frac{\alpha}{r}}}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}\right)^{\frac{r}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}} \Big/ \Gamma\left(\frac{r}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}\right) x^{-\left(\frac{r}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}+1\right)}$$
$$\times \exp\left(-\frac{rKe^{-\frac{\alpha}{r}}}{(1-\alpha\tau)\sigma^2 x}\right) \quad \text{(Gompertco modeliui)}, \tag{22}$$

$$p_{st}^{a}(x) = \left(\frac{K\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{r(1-\alpha\tau)\sigma^2}\right)^{\frac{\beta(r-\alpha)}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}} \Big/ \Gamma\left(\frac{\beta(r-\alpha)}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}\right) x^{-\left(\frac{\beta(r-\alpha)}{(1-\alpha\tau)\sigma^2}+1\right)}$$
$$\times \exp\left(-\frac{K\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{r(1-\alpha\tau)\sigma^2 x}\right) \quad \text{(Ričardso modeliui)}. \tag{23}$$

Naudodami apytikslius ir tikslius stacionariuosius tankius (12)–(17), (21)–(23), L^1 atstumo metodu galime gauti augimo modelių parametrų apytikslius įvertinimus [2]. Rezultatų iliustravimui naudosime Lietuvos pušynų stebėjimų duomenis. Buvo stebėta 1581 medžio amžius ir aukštis. Adityviojo triukšmo atveju apskaičiuoti parametrų įvertinimai ir determinacijos koeficientas pateikti 1-oje lentelėje.

Augimo trajektorijų skaitmeninei imitacijai, naudojome stochastinės diferencialinės lygties antros eilės aproksimaciją [3]. Determinacijos koeficiento reikšmės leidžia tvirtinti, kad apskaičiuoti apytiksliai parametrų įvertinimai yra priimtini aukščio modeliavimui. Medžių aukščio kitimo trajektorija kartu su stebėjimo duomenimis pateikta 1 pav. Iš 1 pav. matome, kad imituotas sprendinys nuo tam tikro amžiaus pradeda svyruoti apie stacionarųjį tašką $x_* = \frac{K(r-\alpha)}{r} = 24,4350$.



1 pav. Medžių aukščio kitimas, pagal Verhulsto dėsnį.

1 lentelė. Parametrų įvertinimai ir determinacijos koeficientas

Tankis	Parametrai						R^2
	r	K	β	α	τ	σ	
Lygtis (12)	0,0280	43,3282		0,0122	38,4173	0,5279	0,8430
Lygtis (13)	0,0158	52,9017		0,0122	38,4173	0,5279	0,8651
Lygtis (14)	0,0473	48,1330	1,9392	0,0346	39,2681	0,5207	0,8358
Lygtis (15)	0,0343	44,5808		0,0155	38,4173	0,5279	0,8843
Lygtis (16)	0,0189	55,6387		0,155	38,4173	0,5279	0,8755
Lygtis (17)	0,0506	32,1324	1,9392	0,0346	39,2681	0,5207	0,8782

Literatūra

1. T.D. Frank, Fokker–Planck perspective on stochastic delay systems: exact solutions and data analysis of biological systems, *Physical Review E*, **68**, 021912 (2003).
2. P. Rupšys, Estimation of parameters of the stochastic linear delay growth law through the L^1 distance procedure, *Liet. matem rink.*, **46** (spec. nr.), 397–404 (2006).
3. U. Kuchler, E. Platen, Weak discrete time approximation of stochastic differential equation with time delay, *Mathematics and Computer Simulation*, **59**, 497–507 (2002).

SUMMARY

P. Rupšys. Approximate stationary densities, and parameter estimations for time-delayed stochastic logistic growth laws

We consider stochastic logistic type delayed growth model (Verhulst, Gompertz, Richards) of a single species population. The objective of this paper is to deduce a procedure on the estimation of parameters. We derive approximate stationary distributions in the case of small time delays. For the estimate of parameters we apply the L^1 distance procedure. We propose approximate estimations of the parameters.

Keywords: stochastic logistic growth, Fokker–Planck equation, stationary solution, parameter estimation.